THEORIE DES PROBABILITES
2eme ANNEE LICENSE STATISTIQUES

La Théorie des Probabilités constitue un ensemble de modéles mathématiques déstinés à l'étude des phénomenes dont l'évolution est gérée par le hasard.

L'homme est souvent confronté à des experiences dont il ne connait pas les resultats avec certitude. Afin de maitriser ce genre de phénomenes il adopte une méthode subjective qui consiste à mesurer le degré de certitude (ou d'incertitude), des issues auquelles il fait face, par un nombre. Il appelle ce nombre "probabilité de réalisation de l'issue considérée". Cette méthode de mesure de l'incertain est differente de celle qui consiste à mesurer par exemple une distance entre deux points donnés. Parmi les experiences gérées par le hasard, l'une des plus simples est celle qui consiste à jeter une piece de monnaie, donnant lieu à deux résultats possibles: pile ou face. Pour maitriser ce type d'experience on mesure chacun des résultats par un nombre que l'on convient d'appeller "probabilité de réalisation du résultat". L'objectif de la Théorie des Probabilités est de donner à cette mesure de l'incertain un contenu mathematique rigoureux permettant une maitrise sans faille de son utilisation. Dans cet exposé nous avons adopté une présentation simple et intuitive de cette Théorie sans faire appel à la Théorie de la Mesure et de l'integration.

Ces notes de cours déstinés aux étudiants sont en principe conformes au programme de 2eme année license statistiques. Le plan adopté est le suivant:

Chapitre 1. Rappels de théorie des ensembles
Chapitre 2. Dénombrement et Analyse combinatoire
Chapitre 3. Espaces Probabilisés
Chapitre 4. Variables Aléatoires
Chapitre 5. Convergence et Approximations

Chapitre 1
RAPPELS DE THEORIE DES ENSEMBLES

1. Algèbre d'ensembles

Définition 1.1: Soit Ω un ensemble arbitraire:
$\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble de toutes les parties de Ω, ϕ désigne l'ensemble vide.

Exemples:
(a) ensemble de nombres: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
(b) .ensemble de communes
(c) ensemble de résultats d'une éléction

Définition 1.2: Opérations sur les ensembles Soient $A, B, C, ...$
des parties de Ω :
union $A \cup B = \{\omega : \omega \in A \text{ ou } \omega \in B\}$
intersection $A \cap B = \{\omega : \omega \in A \text{ et } \omega \in B\}$
complement $A^c = \{\omega : \omega \notin A\}$

Propriétés 1.3:
$A \subset B \iff B^c \subset A^c \quad (A^c)^c = A$
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Définition 1.4: (Algèbre de Boole)
Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ une famille de parties de Ω.
$\mathcal{F}$ est une Algebre de Boole si elle satisfait les conditions:
(a) $\Omega \in \mathcal{F}$
(b) $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$
(c) Si A, B sont dans $\mathcal{F}$ alors $A \cup B \in \mathcal{F}$

Remarque:
si $\mathcal{F}$ est une Algebre de Boole alors $\phi \in \mathcal{F}$ et
$A \cap B \in \mathcal{F}$ pour tous A, B dans $\mathcal{F}$.

Exemple:
(a) $\mathcal{P}(\Omega)$ est une algebre
(b) $\mathcal{F} = \{\Omega, \phi\}$ est une algebre
Voir exercice pour un example non trivial d'algebre.

2. Produit Cartesien

Définition 2.1:
Soient Ω_1, Ω_2 deux ensembles, on définit le produit cartesien $\Omega_1 \times \Omega_2$ par:
$\Omega_1 \times \Omega_2 = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2\}$

Remarque 2.2:
La notation (ω_1, ω_2) est celle d'un couple, i.e $(\omega_1, \omega_2) \neq (\omega_2, \omega_1)$ si $\omega_1 \neq \omega_2$

Définition 2.3: (Cardinaux)
Si Ω est un ensemble quelconque on definit le cardinal de Ω par:
$|\Omega| = \left\{ \begin{array}{c} n \text{ si } \Omega \text{ possede } n \text{ elements} \\ \infty \text{ si } \Omega \text{ est infini} \end{array} \right\}$

Proposition 2.4:
Pour tous ensembles finis Ω_1, Ω_2 on a $|\Omega_1 \times \Omega_2| = |\Omega_1| \times |\Omega_2|$

Preuve: Posons $|\Omega_1| = m$, $|\Omega_2| = n$, avec
$\Omega_1 = \{a_1, a_2, ..., a_m\}, \Omega_2 = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$; ainsi on aura:
$\Omega_1 \times \Omega_2 = \{(a_i, b_j), \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ que l'on peut ecrire:

$$\begin{array}{c} (a_1, b_1), (a_1, b_2), ..., (a_1, b_n) \\ (a_2, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_2, b_n) \\ . \\ (a_m, b_1), (a_m, b_2), ..., (a_m, b_n) \end{array}$$

il est clair que l'on a au total $m.n$ couples, donc $|\Omega_1 \times \Omega_2| = |\Omega_1| \times |\Omega_2|$.

Proposition 2.5:
Si $|\Omega| = n$ alors $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^n \quad (*)$

Preuve: Par recurrence sur n :
(a) pour $n = 0$, on a $\Omega = \phi$ et $2^0 = 1$
la propriété $(*)$ est vraie puisque $\mathcal{P}(\Omega) = \{\phi\}$.
(b) supposons $(*)$ vraie pour n et montrons qu'elle est vraie pour $n+1$
on écrit $\Omega, |\Omega| = n+1$ sous la forme $\Omega = \Omega_1 \cup \{\omega\}$ avec $|\Omega_1| - n$ et $\omega \notin \Omega_1$
dans ce cas on a $\mathcal{P}(\Omega) = \{A \cup \{\omega\}, A \in \mathcal{P}(\Omega_1)\} \cup \mathcal{P}(\Omega_1)$ et
$\{A \cup \{\omega\}, A \in \mathcal{P}(\Omega_1)\} \cap \mathcal{P}(\Omega_1) = \phi$
on déduit que $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$
voir chap.2 pour une autre démonstration.

Chapitre 2

ANALYSE COMBINATOIRE

1. Permutations-Arrangements

Proposition 1.1: (Formule du Binome)

$(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k . a^k . b^{n-k}$ avec $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$

$C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

Proposition 1.2: Soit Ω un ensemble de n éléments
Le nombre de permutations des n éléments de Ω vaut:
$n! = n.\,(n-1)\,.\,(n-2)\,...3.2.1$, avec $0! = 1$

Exemple:
permtation des $n = 3$ éléments de l'ensemble $\Omega = \{a, b.c\}$:
$abc \quad acb \quad bac \quad bca \quad cab \quad cba,\quad 3! = 3.2.1 = 6$

Proposition 1.3: Soit Ω un ensemble de n éléments
Le nombre d'arrangements à k éléments parmi n est égal à:
$A_n^k = n.\,(n-1)\,.\,(n-2)\,.\,(n-3)\,....\,(n-k+1)$

Exemple 1:
arrangements à 2 éléments de l'ensemble $\Omega = \{a, b, c, d\}$:
$A_4^2 = 4.3 = 12$
$ab \quad ba \quad ac \quad ca \quad ad \quad da \qquad bc \quad cb \quad bd \quad db \quad cd \quad dc$

Exemple 2:
Tirages de 2 boules dans une urne contenant 3: $\{a, b, c\}$
$(*)$ Tirages sans remise:
$A_3^2 = 3.\,(3-2+1) = 3.2 = 6$
$ab \;\; ba \;\; ac \;\; ca \;\; bc \;\; cb$
$(*)$ Tirages avec remise:
$aa \;\; ab \;\; ac \;\; bb \;\; ba \;\; bc \;\; cc \;\; ca \;\; cb$
$3^2 = 9$

Exemple 3:
cas general: Tirages de k boules dans une urne contenant n :
$(*)$ Tirages sans remise:
$A_n^k = n.\,(n-1)\,.\,(n-2)\,.\,(n-3)\,....\,(n-k+1)$
$(*)$ Tirages avec remise:
$n.n.n.....n = n^k$

2. Combinaisons

Proposition 2.1: Soit Ω un ensemble de n éléments
Le nombre de parties de Ω à k éléments est égal à:
$C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} = \dfrac{A_n^k}{k!}$
Application: Soit Ω un ensemble de n éléments
Alors on a: $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^n$
Preuve: On utilise la formule du binome (Proposition 1.1):
$(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k.a^k.b^{n-k}$ avec $a = b = 1$
on obtient par la Proposition 2.1:
$|\mathcal{P}(\Omega)| = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n.$

Chapitre 3

ESPACES PROBABILISES

1. Experiences Aléatoires

L'objectif de ce chapitre est de construire un modéle mathematique pour gérer les phénoménes qui évoluent au hasard.

1.1 Une experience aléatoire est une experience dont le résultat ne peut étre connu d'avance avec certitude. Comme exemple on peut citer:

-lancer une piece de monnaie, résultats {pile, face}

-lancer un dé, résultats {1,2,3,4,5,6}

-prevoir la météo un jour donné

Une experience qui n'est pas alétoire est dite deterministe, son résultat est connu d'avance avec certitude.

1.2.Ensemble fondamental d'une experience alétoire, c'est l'ensemble de tous les résultats possibles de l'experience.

On note cet ensemble $\Omega = \{\omega : \ \omega \text{ résultat possible}\}$

1.3.Evenement, c'est par définition une partie de Ω

$\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble de tous les evenements associés à l'experience

l'evenement A se réalise si on observe un résultat $\omega \in A$.

Exemple.(1) Avec l'experience du dé on a $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et comme exemple l'evenement A : "face paire" $A = \{2, 4, 6, \}$

(2) Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On tire une boule au hasard. Dans cette experience $\Omega = \{1, 2, 3, ..., 12\}$ et $A = \{3, 6, 9, 12\}$ est l'evenement "No. multiple de 3"

2. Mesure de Probabilité

2.1 Définition Une mesure de probabilité sur un ensemble Ω est une function $P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$ satisfaisant les conditions:

(a) $P(\Omega) = 1$

(b).$\sigma-$additivité: pour toute suite $(A_n) \subset \mathcal{P}(\Omega)$, telle que:

$A_i \cap A_j = \phi$, $\forall i \neq j$, on a :$P\left(\underset{n}{\cup} A_n\right) = \sum\limits_n P(A_n)$

Le couple Ω, P s'appelle espace probabilisé.

il est facile de voir que $P(\phi) = 0$.

on peut aussi remarquer que $P(A^c) = 1 - P(A)$

2.2 Espace probabilisé discret:

L'espace Ω, P est discret si Ω est une suite finie ou infinie:

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, ...\}$ avec $\sum\limits_n P(\omega_n) = 1$

Exemples.

(1) $\Omega = \{pile, face\}$ $P(pile) = \alpha,\ P(face) = 1 - \alpha$

(2) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (experience du dé)

$P(i) = \dfrac{1}{6}$ pour $1 \leq i \leq 6$ (probabilité uniforme) si A : "face paire" $A = \{2, 4, 6, \}$

on a $P(A) = P\{2, 4, 6, \} = P(2) + P(4) + P(6) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

(3) Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On tire une boule au hasard. Dans cette experience $\Omega = \{1, 2, 3, ..., 12\}$ et $A = \{3, 6, 9, 12\}$ est l'evenement "No. multiple de 3". On définit P en posant:

$P(\omega) = x$ pour tout numero pair ω

$P(\omega) = y$ pour tout numero impair ω

on a alors $P(\Omega) = 6x + 6y = 1$ donc $x + y = \dfrac{1}{6}$

dans ce cas $P(A) = P(3) + P(6) + P(9) + P(12) = 2y + 2x = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

(4) Considérons l'experience: lancer un dé 2 fois.

On a $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et supposons P =probabilité uniforme $P(i, j) = \dfrac{1}{36}, \forall (i, j) \in \Omega$; calculons la probabilité de $A = \{(i, j) \in \Omega : i = j\} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

on a $P(A) = P(1, 1) + P(2, 2) + P(3, 3) + P(4, 4) + P(5, 5) + P(6, 6) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$; regardons l'evenement $A^c = \{(i, j) \in \Omega : i \neq j\}$

on a $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$

3. Probabilité conditionnelle-Indépendance

3.1 Définition. Soit Ω, P un espace probabilisé.(Définition 2.1)

La probabilité $P(A)$ d'un evenement A peut être réévaluer en tenant compte de la réalisation d'un autre evenement B. Cette réévaluation utilise la notion de probabilité conditionnelle définie par $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, $P(B) \neq 0$

lire "probabilité de A si B "

l'exemple qui suit justifie cette définition:

soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, .., \omega_n\}$ avec P =probabilité uniforme

si $A \subset \Omega$ alors $P(A) = \dfrac{|A|}{n}$. Soient A, B 2 evenements; parmi les résultats qui réalisent B, $A \cap B$ sont ceux qui réalisent A donc si B se réalise , la probabilté de réaliser A vaut $\dfrac{|A \cap B|}{|B|}$ que l'on peut écrire $\dfrac{\frac{|A \cap B|}{n}}{\frac{|B|}{n}} = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Si la réalisation de A ne dépend pas de celle de B on aura $P(A|B) = P(A)$, cela conduit à la définition suivante:

3.2 Définition. Les evenements A et B sont indépendants si

$P(A|B) = P(A)$,autrement dit $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

3.3. Proposition. Si les evenements A et B sont indépendants alors:

$[A, B^c], [A^c, B], [A^c, B^c]$ sont des couples d'evenements indépendants

Preuve. voir exercice

Exemple.

Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On tire une boule au hasard. Dans cette experience $\Omega = \{1, 2, 3, ..., 12\}$ et $A = \{3, 6, 9, 12\}$ est l'evenement "No. multiple de 3". On définit P en posant:

$P(\omega) = x$ pour tout numero pair ω

$P(\omega) = y$ pour tout numero impair ω

on a alors $P(\Omega) = 6x + 6y = 1$ donc $x + y = \frac{1}{6}$

dans ce cas $P(A) = P(3) + P(6) + P(9) + P(12) = 2y + 2x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

il est facile de montrer que les evenements suivants sont indépendants $\forall 0 < x, y < 1$.

$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ et $B = \{3, 6, 9, 12\}$

3.4. Proposition. Pour tous evenements A, B on a:

(a) $P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)$

(b) $P(A|B) = \dfrac{P(B|A).P(A)}{P(B|A).P(A) + P(B|A^c).P(A^c)}$ (Formule de Bayes)

3.5 Définition. Soit $\{A_i, i \in I\}$ une famille arbitraire d'evenements on dit que ces evenements sont indépendants dans leur ensemble si:

pour toute partie finie $J \subset I$ on a $P\left(\underset{j \in J}{\cap} A_j\right) = \underset{j \in J}{\Pi} P(A_j)$

Chapitre 4

VARIABLES ALEATOIRES (V.A)

1. Définitions-Loi d'une variable aléatoire

1.1 Définition. Soit Ω, P un espace probabilisé
une variable aléatoire sur Ω, P est une fonction

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \omega \in \Omega \longrightarrow X(\omega) \in \mathbb{R}$

$X(\Omega)$ est l'ensemble des valeurs de X

C'est une représentation numérique des résultats d'une experience.
On utilise les notations suivantes:

$\{X = x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$

$\{X \leq x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$

$\{a < X < b\} = \{\omega \in \Omega : a < X(\omega) < b\}$

1.2 Définition.

Soit X une variable aléatoire sur Ω, P

on définit la loi de probabilité de X par la fonction

$f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1],\ x \longrightarrow f(x) = P\{X = x\} = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$

1.3 Définition. (Fonction de Répartition)

Soit X une V.A définie sur l'espace Ω, P. La fonction de répartitionde X est définie par:

$F : \mathbf{R} \longrightarrow [0, 1],\ F(x) = P(X \leq x) = P(\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x)$. Il n'est pas difficile de montrer que:

(a) F est croissante

(b) F est continue à droite i.e $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} .F(x) = F(a)\ \forall a \in \mathbf{R}$

(c) F admet une limite à gauche i.e $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} .F(x) = l$

(d) $\lim\limits_{x \to -\infty} .F(x) = 0,\ \lim\limits_{x \to \infty} .F(x) = 1$

1.4 Exemples.

(a) On lance 3 fois une piece de monnaie: p pile, f face

$\Omega = \{ppp, fpp, pfp, ppf, pff, fpf, ffp, fff\}$, P =probabilité uniforme

$X(\omega)$ = nombre de piles dans ω. $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

loi de X :

$f(0) = P(X = 0) = P\{fff\} = \dfrac{1}{8}$

$f(1) = P(X = 1) = P\{pff, fpf, ffp\} = \dfrac{3}{8}$

$f(2) = P(X = 2) = P\{fpp, pfp, ppf\} = \dfrac{3}{8}$

$f(3) = P(X = 3) = P\{ppp\} = \dfrac{1}{8}$

(b) Une urne contient 15 boules:

7 boules de 1kg, 5 boules de 3kg, 3 boules de 5kg

on tire un boule ω au hasard et on note son poids $X(\omega)$

on a Ω =l'ensemble des 15 boules, P =probabilité uniforme
$X : \Omega \longrightarrow \{1, 3, 5\}$ $\omega \longrightarrow X(\omega)$ =poids de ω
$P(X = 1) = \frac{7}{15}$, $P(X = 3) = \frac{5}{15}$, $P(X = 5) = \frac{3}{15}$

2. Variables alétoires discrétes

2.1 Définition.

Soit X une V.A définie sur l'espace Ω, P on dit que X est discréte si l'ensemble de ses valeurs $X(\Omega)$ est une suite finie ou infinie de nombres rééls; on écrit: $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3....\}$ et la loi de X est donnée par $f(x_n) = P(X = x_n)$ $n = 1, 2, 3.....$

2.1 Exemples. Soit Ω, P un espace probabilisé

(a) Variable de Bernoulli: $\mathcal{B}(p), 0 < p < 1$
$X(\Omega) = \{0, 1\}$, $P(X = 1) = p$, $P(X = 0) = 1 - p$

(b) Variable Binomiale: $\mathcal{B}(n, p)$, $n \geq 0 \;\; 0 < p < 1$
$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3..., n\}$, $P(X = k) = C_n^k.p^k.(1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, 2, ..., n$.
pour vérifier que $\sum\limits_{k=0}^{n}.P(X = k) = 1$, on utilise le Binome de Newton
$\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \; a^k b^{n-k} = (a+b)^n$ avec a=p, b=1-p

(c) Loi géometrique $\mathcal{G}(p)$, $0 < p < 1$
$X(\Omega) = \{1, 2, 3...\}$, $P(X = k) = p.(1-p)^{k-1}$, $k = 1, 2, 3, ...$
$\sum\limits_{k=1}^{\infty}.p.(1-p)^{k-1} = 1$

(d) Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$
$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3...\}$, $P(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$, $k = 0, 1, 2, 3, ...$
$\sum\limits_{k=0}.e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!} = 1$ (utiliser la relation $\sum\limits_{k=0}.\dfrac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$)

3. Esperance-Variance

On considére une V.A discrete X sur un espace Ω, P avec:
$X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3....\}$ et la loi de X donnée par $f(x_n) = P(X = x_n)$ $n = 1, 2, 3....$

3.1 Définition.
L'esperance de X est définie par:
$E(X) = \sum\limits_{n\geq 1}.x_n.P(X = x_n) = \sum\limits_{n\geq 1}.x_n.f(x_n)$
on dit que X est d'esperance finie si $-\infty < E(X) < +\infty$.

3.2 Exemples. Soit Ω, P un espace probabilisé

(a) Variable de Bernoulli: $\mathcal{B}(p), 0 < p < 1$
$X(\Omega) = \{0, 1\}$, $P(X = 1) = p$, $P(X = 0) = 1 - p$
$E(X) = 1.P(X = 1) + 0.P(X = 0) = p$

(b) Variable Binomiale: $\mathcal{B}(n, p)$, $n \geq 0 \;\; 0 < p < 1$
$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3..., n\}$, $P(X = k) = C_n^k.p^k.(1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, 2, ..., n$.
$E(X) = \sum\limits_{k=0}^{n}.k.C_n^k \; p^k.(1-p)^{n-k} = n.p$ (voir calculs en T.D)

(c) Loi géometrique $\mathcal{G}(p)$, $0 < p < 1$
$X(\Omega) = \{1, 2, 3...\}$, $P(X = k) = p.(1-p)^{k-1}$, $k = 1, 2, 3, ...$
$E(X) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}.k.p.(1-p)^{k-1} = \dfrac{1}{p}$ (voir calculs en T.D)

(d) Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$

$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3...\}$, $P(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$, $k = 0, 1, 2, 3, ...$

$E(X) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} .k.e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!} = \lambda$ (voir calculs en T.D)

3.3 Propriétés de l'Esperance.

(1) $\forall a, b \in R$, $E(aX + bY) = a.E(X) + b.E(Y)$

(2) $|E(X)| \leq E(|X|)$

(3) $X \leq Y \implies E(X) \leq E(Y)$

3.4 Définition. On considére une V.A discrete X sur un espace Ω, P avec:

$X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3....\}$ et la loi de X donnée par $f(x_n) = P(X = x_n)$ $n = 1, 2, 3...$

La variance de X est définie par:

$V(X) = E\left[(X - E(X))^2\right]$

$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$ s'appelle l'écart type

3.3 Propriétés de la Variance.

On pose $E(X) = \mu$

(a) $V(X) = E\left(X^2\right) - \mu^2$

(b) $\forall a, b \in R$, $V(aX + b) = a^2.V(X)$

3.4 Variance de Lois Discrétes usuelles.

(a) Variable de Bernoulli: $\mathcal{B}(p)$, $0 < p < 1$

$X(\Omega) = \{0, 1\}$, $P(X = 1) = p$, $P(X = 0) = 1 - p$

$E(X) = 1.P(X = 1) + 0.P(X = 0) = p$

$V(X) = p(1 - p)$

(b) Variable Binomiale: $\mathcal{B}(n, p)$, $n \geq 0$ $0 < p < 1$

$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3..., n\}$, $P(X = k) = C_n^k.p^k.(1 - p)^{n-k}$, $k = 0, 1, 2, ..., n.$

$E(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} .k.C_n^k\, p^k.(1 - p)^{n-k} = n.p$ (voir calculs en T.D)

$V(X) = np(1 - p)$

(c) Loi géometrique $\mathcal{G}(p)$, $0 < p < 1$

$X(\Omega) = \{1, 2, 3...\}$, $P(X = k) = p.(1 - p)^{k-1}$, $k = 1, 2, 3, ...$

$E(X) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} .k.p.(1 - p)^{k-1} = \dfrac{1}{p}$ (voir calculs en T.D)

$V(X) = \dfrac{1 - p}{p^2}$

(d) Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$

$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3...\}$, $P(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$, $k = 0, 1, 2, 3, ...$

$E(X) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} .k.e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!} = \lambda$ (voir calculs en T.D)

$V(X) = \lambda$

4. Variables alétoires absolument continues

4.1 Définition.

Soit X une $V.A$ définie sur l'espace Ω, P on dit que X est absolument continue si sa fonction de répartition F (Définition 1.3) est de la forme $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x).dx = P(\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x)$ avec f fonction réélle positive Riemann intégrable et $\int_{-\infty}^{\infty} f(x).dx = 1$. Pour simplifier nous supposerons la fonction f continue, de sorte que F soit dérivable et $F^{'}(x) = f(x)$, dans ce cas $F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x).dx = P(a \leq X \leq b) = P(\omega \in \Omega : X(\omega) \in [a, b])$ et $P(X = x) = \int_{x}^{x} f(x).dx = 0, \forall x$.

La fonction f s'appelle densité de la variable aléatoire X.

4.2 Exemples.

(a) **La loi uniforme $\mathcal{U}$ $[a, b]$ de densité donnée par:**

$f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ si $x \in [a, b]$

$f(x) = 0$ si $x \notin [a, b]$

Fonction de répartition donnée par:

$F(x) = 0$ si $x < a$

$F(x) = \dfrac{x-a}{b-a}$ si $x \in [a, b]$

$F(x) = 1$ si $x > b$

(b) **La loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$, de densité donnée par:**

$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, si $x \geq 0$

$f(x) = 0$, si $x < 0$

Fonction de répartition:

$F(x) = 0$, si $x < 0$

$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, si $x \geq 0$

(c) **Loi Normale ou Loi de Gauss $\mathcal{N}(m, \sigma)$, de densité donnée par:**

$f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ avec $x \in \mathbf{R}$

Cas particulier: **Loi Normale centrée réduite avec $\sigma = 1, m = 0$:**

densité donnée par: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{x^2}{2}}$ avec $x \in \mathbf{R}$

4.3 Esperance et Variance de V.A. absolument continues

Soit X une V.A absolument continue de densité $f(x)$

(a) On définit l'esperance de X par:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x).dx = \mu$$

(b) On définit la variance de X par:

$$V(X) = E\left[(X-\mu)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 .f(x).dx$$

(Rappel: $V(X) = E\left(X^2\right) - \mu^2$), écart type $\sigma = \sqrt{V(X)}$

4.4 Exemples. (Rappel: $V(X) = E\left(X^2\right) - \mu^2$), avec $E(X) = \mu$

(a) **La loi uniforme** $\mathcal{U}\ [a,b]$**:** $E(X) = \displaystyle\int_a^b \frac{x}{b-a}.dx = \frac{a+b}{2}$

$$V(X) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}.dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

(b) **La loi exponentielle** $\mathcal{E}(\lambda)$**,** $\lambda > 0$: $E(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x.\lambda e^{-\lambda x}.dx = \frac{1}{\lambda}$

$$V(X) = \int_0^{+\infty} x^2.\lambda e^{-\lambda x}.dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

(c) **Loi Normale** $\mathcal{N}(m,\sigma)$: $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x.\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = m$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2.\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} - m^2 = \sigma^2.$$

5. Inégalités

5.1.Définition. Soit A une partie de $\mathbf{R}$

(a) La fonction indicatrice de A est définie par:
$I_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $I_A(x) = 0$ si $x \in A^c$.
(b) Si f est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ on note la fonction définie par:
$(f.I_A)(x) = f(x)$ si $x \in A$
$(f.I_A)(x) = 0$ si $x \in A^c$

5.2.Définition. Soit X une V.A sur Ω, P, et $A \subset \Omega$
$(X.I_A)(\omega) = X$ si $\omega \in A$
$(X.I_A)(\omega) = 0$ si $\omega \in A^c$

5.3.Définition. (Integrale locale)

(a) Soit f une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et soit A une partie de $\mathbf{R}$, l'integrale locale de la fonction f sur A est définie par $\int_A f(x).dx = \int_{\mathbf{R}} (f.I_A)(x).dx$.

A titre d'exemple on peut prendre $A =]a, +\infty[$
on obtient $\int_A f(x).dx = \int_a^{+\infty} f(x).dx$.

(b) Soit X une V.A sur Ω, P, et $A \subset \Omega$ l'esperance locale de la V.A X sur A est définie par $E_A(X) = E(X.I_A)$
A titre d'exemple on peut prendre $A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq a\}$
L'application de l'esperance locale pour la V.A $|X|$ permet de prouver l'inegalite de Markov ci-dessous

Le but de la suite est de donner certaines inégalités utiles dans les applications. Les V.A considérées sont supposées avoir une esperance finie.

Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire telle que $E(|X|) < \infty$ alors $\forall \lambda > 0$ on a:
$P(|X| > \lambda) \leq \dfrac{E(|X|)}{\lambda}$

Inégalité de Jensen

$|E(X)| \leq E(|X|)$
Plus géneralement si $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction convexe telle que $E(|f(X)|) < \infty$, alors: $f(E(X)) \leq E(f(X))$

Inégalité de Tchebychev

Soit $\lambda > 0$ et soit X une V.A de variance finie alors
$P(|X - E(X)| \geq \lambda) \leq \dfrac{V(X)}{\lambda^2}$

6. Convergence de suites de variables aléatoires Approximations

6.1 Types de convergence

Soit X_n une suite de V.A.sur Ω, P, de fonction de répartition F_n

(a) **Convergence en probabilité:**

X_n converge en probabilité vers la V.A X si:

$\forall \epsilon > 0, \lim\limits_{n \to \infty} .P\left(|X_n - X| > \epsilon\right) = 0$ (notation $X_n \xrightarrow{P} X$)

(b) **Convergence presque sûre**

X_n converge presque sûrement vers la V.A X si:$\exists A \subset \Omega$

avec $P(A) = 0$ et $\lim\limits_{n \to \infty} .X_n(\omega) = X(\omega)$, $\forall \omega \notin A$ (notation $X_n \xrightarrow{p.s} X$)

(c) **Convergence en Loi**

X_n converge en loi vers la V.A X de fonction de répartition F si:

$\lim\limits_{n \to \infty} .F_n(t) = F(t)$ en tout point de continuité t de F(notation $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$)

6.2. Approximation de la loi Binomiale par la loi de Poisson

Soit X_n une suite de V.A de loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$, $n \geq 0 \quad 0 < p_n < 1$

Supposons que $\lim\limits_{n \to \infty} .np_n = \lambda > 0$

X_n converge en loi vers la V.A X de Poisson de parametre λ

i.e $P(X = k) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$, $k = 0, 1, 2, 3, ...$

6.3.Theoreme

Soit X_n, X une suite de V.A.sur Ω, P, alors on a:

$X_n \xrightarrow{p.s} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow{P} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

La reciproque de ces implications est fausse en general

6.3.Theoreme: Loi des grands nombres

(a) **Loi faible:**

Soit X_n, une suite de V.A.sur Ω, P

supposons les X_n independantes et de meme loi

(donc de meme esperance $=\mu$) alors:

(a) **Loi faible:**

$M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$ converge en probabilité vers μ.

i.e $P(|M_n - \mu| > \epsilon) \longrightarrow 0, \forall \epsilon > 0$

(b) **Loi forte:**

$M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$ converge presque sûrement vers μ.

(Les V.A. X_n sont independantes si $\forall n \geq 1$ et pour tous

$\{A_1, A_2, ..., A_n\} \subset \mathcal{P}(\Omega)$:

$P((X_1 \in A_1) \cap (X_2 \in A_2) \cap ... \cap P(X_n \in A_n)) = \prod\limits_{j=1}^{n} P(X_j \in A_j))$

7. Theorem de la limite centrale

Rappel: **Loi Normale**

Loi Normale ou Loi de Gauss $\mathcal{N}(m,\sigma)$, de densité donnée par:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{avec } x \in \mathbf{R}$$

Cas particulier: **Loi Normale centrée réduite avec $\sigma = 1, m = 0$:**

densité donnée par: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{x^2}{2}}$ avec $x \in \mathbf{R}$

Theoreme:

Soit Soit X_n, une suite de V.A.sur Ω, P

supposons les X_n independantes et de meme loi

d'esperance μ et d'ecart type σ finis, $\sigma \neq 0$, alors on a:

avec $M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$,

$\dfrac{M_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ converge en loi vers **Loi Normale centrée réduite**

avec $\sigma = 1, m = 0$ de densité donnée par: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{x^2}{2}}$ avec $x \in \mathbf{R}$

ce qui signifie: $\lim\limits_{n\to\infty} .P\left(\dfrac{M_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq x\right) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{x^2}{2}} .dx$