5. Inégalités

5.1.Définition. Soit A une partie de $\mathbf{R}$
(a) La fonction indicatrice de A est définie par:
$I_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $I_A(x) = 0$ si $x \in A^c$.
(b) Si f est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ on note la fonction définie par:
$(f.I_A)(x) = f(x)$ si $x \in A$
$(f.I_A)(x) = 0$ si $x \in A^c$

5.2.Définition. Soit X une V.A sur Ω, P, et $A \subset \Omega$
$(X.I_A)(\omega) = X$ si $\omega \in A$
$(X.I_A)(\omega) = 0$ si $\omega \in A^c$

5.3.Définition. (Integrale locale)
(a) Soit f une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et soit A une partie de $\mathbf{R}$, l'integrale locale de la fonction f sur A est définie par $\int\limits_A f(x).dx = \int\limits_{\mathbf{R}} (f.I_A)(x).dx$.
A titre d'exemple on peut prendre $A =]a, +\infty[$
on obtient $\int\limits_A f(x).dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x).dx$.
(b) Soit X une V.A sur Ω, P, et $A \subset \Omega$ l'esperance locale de la V.A X sur A est définie par $E_A(X) = E(X.I_A)$
A titre d'exemple on peut prendre $A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq a\}$
L'application de l'esperance locale pour la V.A $|X|$ permet de prouver l'inegalite de Markov ci-dessous

Le but de la suite est de donner certaines inégalités utiles dans les applications. Les V.A considérées sont supposées avoir une esperance finie.

Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire telle que $E(|X|) < \infty$ alors $\forall \lambda > 0$ on a:
$P(|X| > \lambda) \leq \frac{E(|X|)}{\lambda}$

Inégalité de Jensen

$|E(X)| \leq E(|X|)$
Plus géneralement si $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction convexe telle que
$E(|f(X)|) < \infty$, alors: $f(E(X)) \leq E(f(X))$

Inégalité de Tchebychev

Soit $\lambda > 0$ et soit X une V.A de variance finie alors
$P(|X - E(X)| \geq \lambda) \leq \frac{V(X)}{\lambda^2}$

6. Convergence de suites de variables aléatoires
Approximations

Types de convergence
Soit X_n une suite de V.A.sur Ω, P, de fonction de répartition F_n

(a) **Convergence en probabilité:**
X_n converge en probabilité vers la V.A X si:
$\forall \epsilon > 0,\ \lim\limits_{n \to \infty} .P\left(|X_n - X| > \epsilon\right) = 0$ (notation $X_n \xrightarrow{P} X$)

(b) **Convergence presque sûre**
X_n converge presque sûrement vers la V.A X si:$\exists A \subset \Omega$
avec $P\left(A\right) = 0$ et $\lim\limits_{n \to \infty} .X_n\left(\omega\right) = X\left(\omega\right),\ \forall \omega \notin A$ (notation $X_n \xrightarrow{p.s} X$)

(c) **Convergence en Loi**
X_n converge en loi vers la V.A X de fonction de répartition F si:
$\lim\limits_{n \to \infty} .F_n\left(t\right) = F\left(t\right)$ en tout point de continuité t de F (notation $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$)

6.2. Approximation de la loi Binomiale par la loi de Poisson
Soit X_n une suite de V.A de loi Binomiale $\mathcal{B}\left(n, p_n\right)$, $n \geq 0 \quad 0 < p_n < 1$:

$P\left(X_n = k\right) = C_n^k.\left(p_n\right)^k.\left(1 - p_n\right)^{n-k}$

Supposons que $\lim\limits_{n \to \infty} .np_n = \lambda > 0$
X_n converge en loi vers la V.A X de Poisson de parametre λ
i.e $P\left(X = k\right) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!},\ k = 0, 1, 2, 3, ...$

6.3.Theoreme
Soit X_n, X une suite de V.A.sur Ω, P, alors on a:
$X_n \xrightarrow{p.s} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow{P} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$
La reciproque de ces implications est fausse en general

6.4.Theoreme: Loi des grands nombres

(a) **Loi faible:**
Soit X_n, une suite de V.A.sur Ω, P
supposons les X_n independantes et de meme loi
(donc de meme esperance $=\mu$) alors:

$M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$ converge en probabilité vers μ.
i.e $P\left(|M_n - \mu| > \epsilon\right) \longrightarrow 0, \forall \epsilon > 0$

(b) **Loi forte:**
$M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$ converge presque sûrement vers μ.

(Les V.A. X_n sont independantes si $\forall n \geq 1$ et pour tous $\{A_1, A_2, ..., A_n\} \subset \mathcal{P}(\Omega)$:
$P((X_1 \in A_1) \cap (X_2 \in A_2) \cap ... \cap P(X_n \in A_n)) = \prod\limits_{j=1}^{n} P(X_j \in A_j))$.