Convergence de suites de variables

A. Variables aléatoires independantes

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires
Les v.a X_n sont dites independantes si $\forall k \geq 1$ et pour tous $\{A_1, A_2, ..., A_k\} \subset \mathcal{P}(\Omega)$:

$P((X_1 \in A_1) \cap (X_2 \in A_2) \cap ... \cap P(X_k \in A_k)) = \prod_{j=1}^{k} P(X_j \in A_j)$.

Propriété fondamentale:
Si les v.a X_n sont independantes et d'esperances finies alors:

$(*)\quad \forall n \geq 2$ on a $E(X_1.X_2....X_n) = E(X_1).E(X_2)....E(X_n)$

On donne ici une preuve dans le cas de 2 v.a discretes X, Y:
supposons donc $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ...\}, Y(\Omega) = \{y_1, y_2, ...\}$
ona $E(X.Y) = \sum_n \sum_k x_n.y_k.P(X = x_n, Y = y_k) = \sum_n \sum_k x_n.y_k.P(X = x_n).P(Y = y_k)$
où on a utilisé l'independance de X et Y dans la relation
$P(X = x_n, Y = y_k) = P(X = x_n).P(Y = y_k)$
remarquons enfin que $\sum_n \sum_k x_n.y_k.P(X = x_n).P(Y = y_k)$
$= \sum_n x_n.P(X = x_n).\sum_k y_k.P(Y = y_k) = E(X).E(Y)$

Remarques:
1. Il est possible de démontrer la propriété $(*)$ par recurrence sur n en utilisant des vecteurs aléatoires qui ne figurent pas au programme.
2. La propriété $(*)$ est aussi vraie pour les v.a absolument continues mais necessite des techniques d'integration multiple.

B. Types de convergence

Soit X_n une suite de V.A.sur Ω, P, de fonction de répartition F_n

(a) **Convergence en probabilité:**
X_n converge en probabilité vers la V.A X si:
$\forall \epsilon > 0,\ \lim_{n\to\infty} .P(|X_n - X| > \epsilon) = 0$ (notation $X_n \xrightarrow{P} X$)

(b) **Convergence presque sûre**
X_n converge presque sûrement vers la V.A X si:$\exists A \subset \Omega$
avec $P(A) = 0$ et $\lim_{n\to\infty} .X_n(\omega) = X(\omega)$, $\forall \omega \notin A$ (notation $X_n \xrightarrow{p.s} X$)

(c) **Convergence en Loi**
X_n converge en loi vers la V.A X de fonction de répartition F si:
$\lim_{n\to\infty} .F_n(t) = F(t)$ en tout point de continuité t de F (notation $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$)

Approximation de la loi Binomiale par la loi de Poisson
Soit X_n une suite de V.A de loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$, $n \geq 0 \quad 0 < p_n < 1$:

$P(X_n = k) = C_n^k . (p_n)^k . (1 - p_n)^{n-k}$

Supposons que $\lim\limits_{n \to \infty} .np_n = \lambda > 0$
X_n converge en loi vers la V.A X de Poisson de parametre λ
i.e $P(X = k) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$, $k = 0, 1, 2, 3, ...$

Démonstration:
Choisissons l'entier n suffisamment grand pour remplacer p_n par $\dfrac{\lambda}{n}$
dans ce cas $P(X_n = k) = C_n^k . \left(\dfrac{\lambda}{n}\right)^k . \left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$, pour n grand
et cela implique:

$$P(X_n = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} . \frac{\lambda^k}{n^k} . \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n . \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{\lambda^k}{k!} . \frac{n!}{(n-k)!.n^k} . \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n . \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

il est facile de voir que $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} . \dfrac{n!}{(n-k)!.n^k} = 1$ et $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} . \left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)^{-k} = 1$
il reste à calculer $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} . \left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)^n$; on pose $x = -\dfrac{n}{\lambda}$
on obtient $\left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)^n = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{-\lambda x}$ d'autre part il est bien connu que
$\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} . \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$ donc $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} . \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{-\lambda x} = e^{-\lambda}$

finalement $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} . \dfrac{n!}{(n-k)!.n^k} . \left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)^n . \left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)^{-k} = e^{-\lambda}$ et
$\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} .P(X_n = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} .e^{-\lambda}$.

Theoreme
Soit X_n, X une suite de V.A.sur Ω, P, alors on a:
$X_n \xrightarrow{p.s} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow{P} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$
La reciproque de ces implications est fausse en general

C. Loi des grands nombres

(a) **Loi faible:**
Soit X_n, une suite de V.A.sur Ω, P
supposons les X_n independantes et de meme loi
(donc de meme esperance $=\mu$) alors:

$M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$ converge en probabilité vers μ.
i.e $P(|M_n - \mu| > \epsilon) \longrightarrow 0, \forall \epsilon > 0$

(b) **Loi forte:**
$M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$ converge presque sûrement vers μ.

Demonstration:
(a) **Loi faible:**
On utilise l'inégalité de Tchebychev:
Soit $\lambda > 0$ et soit X une V.A de variance finie alors
$P\left(|X - E\left(X\right)| \geq \lambda\right) \leq \dfrac{V\left(X\right)}{\lambda^2}$

on l'applique à la v.a $X = M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$
puisque les v.a sont independantes et de même loi on a:

$E\left(X_i\right) = \mu, \forall i$ et $E\left(M_n\right) = \dfrac{n.\mu}{n} = \mu$ et de plus $V\left(M_n\right) = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} V\left(X_i\right)}{n^2}$
avec $V\left(X_i\right) = \sigma^2, \forall i \Longrightarrow V\left(M_n\right) = \dfrac{\sigma^2}{n}$
l'inégalité de Tchebychev donne:

$$P\left(|M_n - E\left(M_n\right)| \geq \epsilon\right) \leq \frac{V\left(M_n\right)}{\epsilon^2} = \frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\epsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n.\epsilon^2} \longrightarrow 0 \text{ si } n \longrightarrow \infty.$$

(b) **Loi forte:**
La demonstration de la loi forte est plus elaborée et necessite des techniques avancées de théorie des probabilités qui ne sont pas au programme.