UNIVERSITE DE BATNA
DEPARTEMENT DE MECANIQUE

Filière : **M1-CM**
Module : **MMC**

CORRIGE DEVOIR N°2

EX 1 .

a) Détermination du tenseur de transformation $a_{ij} = \cos\left(x_i^{'}, x_j\right)$

	$x_1^{'}$	$x_2^{'}$	$x_3^{'}$
x_1	$\cos(0)$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$
x_2	$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$
x_3	$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

b) On applique la loi de transformation d'un tenseur cartésien du second ordre

$$\sigma_{ij}^{'} = a_{ip} a_{jq} \sigma_{pq}$$

ou en forme matricielle $\left[\sigma^{'}\right] = [A][\sigma][A]^T$

$$\sigma_{ij}^{'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 3 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

c) $\sigma_{ii} = 1+1+1 = 3$ $\qquad$ $\sigma_{ii}^{'} = 1+3-1 = 3$

EX 2

a) Le vecteur de contrainte $t_i^{(n)}$ est donné par $t_i^{(n)} = \sigma_{ij} n_j$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} t_1^{(n)} \\ t_2^{(n)} \\ t_3^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -6 & 0 \\ -6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{20}{\sqrt{6}} \\ \frac{-12}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$t_i^{(n)} = \left(\frac{20}{\sqrt{6}} \quad \frac{-12}{\sqrt{6}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

b) La composante normale σ_N et la composante tangentielle σ_S

$$\sigma_N = \underset{\sim}{t}^{(n)} \bullet \underset{\sim}{n} = t_i^{(n)} n_i = t_1^{(n)} n_1 + t_2^{(n)} n_2 + t_3^{(n)} n_3 = \left(\frac{20}{\sqrt{6}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 7 \ ; \quad \sigma_N = 7$$

$$\sigma_S^2 = t_i t_i - \sigma_N^2 = \ = \frac{20^2}{6} + \frac{12^2}{6} + \frac{1}{3} - 49 = 42 \quad \text{donc} \quad \sigma_S = 6.48$$

c) Les valeurs principales et les directions principales des contraintes.

$$\left|\sigma_{ij}-\sigma\delta_{ij}\right|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} (10-\sigma) & -6 & 0 \\ -6 & (10-\sigma) & 0 \\ 0 & 0 & (1-\sigma) \end{vmatrix} = (1-\sigma)\left[\left((10-\sigma)^2-6^2\right)\right]=(1-\sigma)(-\sigma+4)(-\sigma+16)=0$$

Les valeurs principales sont: $\sigma_1=16 \quad ; \quad \sigma_2=4 \quad ; \quad \sigma_3=1$

Les directions principales :

$$\text{Pour } \sigma_1=16 \ : \ \left(\sigma_{ij}-16\,\delta_{ij}\right)n_j=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -6 & -6 & 0 \\ -6 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} -6n_1-6n_2=0 \\ -6n_1-6n_2=0 \\ n_3=0 \end{array}$$

$n_1=-n_2 \quad n_3=0$ avec $n_1^2+n_2^2+n_3^2=1$, on trouve $n_i=\left[\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \ \mp\frac{1}{\sqrt{2}}, \ 0\right]$

$$\text{Pour } \sigma_1=4 \ : \ \left(\sigma_{ij}-4\,\delta_{ij}\right)n_j=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 6n_1-6n_2=0 \\ -6n_1+6n_2=0 \\ -3n_3=0 \end{array}$$

$n_1=n_2 \quad n_3=0$ avec $n_1^2+n_2^2+n_3^2=1$, on trouve $n_i=\left[\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \ 0\right]$

$$\text{Pour } \sigma_3=1 \ : \ \left(\sigma_{ij}-\delta_{ij}\right)n_j=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 9 & -6 & 0 \\ -6 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 9n_1-6n_2=0 \\ -6n_1+9n_2=0 \\ 0n_3=0 \end{array}$$

$n_1=n_2=0 \quad n_3$ quelconque avec $n_1^2+n_2^2+n_3^2=1$, $\quad n_i=[0, \ 0, \ \pm 1]$

La matrice de transformation est :

$$a_{ij}=\begin{bmatrix} \pm\frac{1}{\sqrt{2}} & \mp\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} & \pm\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$$

Détermination de la normale par rapport aux axes principaux

$n_i^*=a_{ij}n_j$

$$\begin{bmatrix} n_1^* \\ n_2^* \\ n_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Alors $n_1^* = \cos\phi = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ $\phi = 54.73^\circ$

$n_2^* = \cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ $\beta = 54.73^\circ$

$n_3^* = \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ $\theta = 54.73^\circ$

d) Vérification des résultats par le tricercle de Mohr.