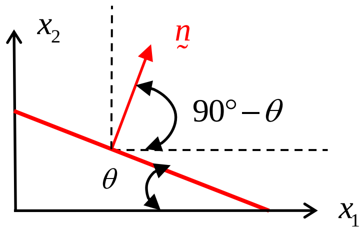
Solution TD N° 2

EX 1.



a) Détermination du vecteur de contrainte

La normale à la surface est

$$n_i=\left(\cos 60^\circ \quad \cos 30^\circ \quad \cos 90^\circ\right) \Rightarrow n_i=\left(\frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad 0\right)$$

Le vecteur de contrainte est donné par $t_i^{(n)}=\sigma_{ij}n_j \Rightarrow \begin{Bmatrix} t_1^{(n)} \\ t_2^{(n)} \\ t_3^{(n)} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \frac{3-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3\sqrt{3}-1}{2} \\ 0 \end{Bmatrix}$

$$t_i^{(n)}=\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2} \quad \frac{3\sqrt{3}-1}{2} \quad 0\right)=\left(0.63 \quad 2.1 \quad 0\right)$$

b) La composante normale $\sigma_N=\underset{\sim}{t}^{(n)}\bullet\underset{\sim}{n}$

$$\sigma_N=t_i^{(n)}n_i=t_1^{(n)}n_1+t_2^{(n)}n_2+t_3^{(n)}n_3=\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3\sqrt{3}-1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=3-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sigma_N=2.13$$

La composante tangentielle

$$\sigma_S^2=t_it_i-\sigma_N^2=0.63^2+2.1^2-2.13^2=0.27 \quad \text{donc} \quad \sigma_S=0.52$$

c) Les invariants

$$I_\sigma=\sigma_{ii}=tr\ \sigma=\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}=3+3+6=12$$

$$II_\sigma=\frac{1}{2}\left(\sigma_{ii}\sigma_{jj}-\sigma_{ij}\sigma_{ij}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(tr\ \sigma\right)^2-tr\left(\sigma^2\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\left(12\right)^2-\left(10+10+36\right)\right]=44$$

$$III_\sigma=\varepsilon_{ijk}\sigma_{1i}\sigma_{2j}\sigma_{3k}=det\left(\sigma\right)=48$$

L'équation caractéristique

$$\sigma^3-I_\sigma\sigma^2+II_\sigma\sigma-III_\sigma=0\rightarrow\sigma^3-12\sigma^2+44\sigma-48=0$$

d) Les valeurs principales des contraintes

$$\left|\sigma_{ij}-\sigma\delta_{ij}\right|0\Rightarrow\begin{vmatrix} 3-\sigma & -1 & 0 \\ -1 & 3-\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 6-\sigma \end{vmatrix}=\left(6-\sigma\right)\left[\left(3-\sigma\right)^2-1\right]=0\Rightarrow\left(6-\sigma\right)\left[\left\{\left(3-\sigma\right)-1\right\}\left\{\left(3-\sigma\right)+1\right\}\right]$$

$\left(6-\sigma\right)\left(2-\sigma\right)\left(4-\sigma\right)=0$ alors $\sigma_1=6$; $\sigma_2=4$; $\sigma_3=2$

La matrice diagonalisée du tenseur de contrainte

$$\sigma_{ij}^{*}=\begin{bmatrix}6&0&0\\0&4&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

Vérification des invariants

$$I_\sigma=\sigma_{ii}=tr\,\sigma=\sigma_{(1)}+\sigma_{(2)}+\sigma_{(3)}=6+4+2=12$$

$$II_\sigma=\frac{1}{2}\left(\sigma_{ii}\sigma_{jj}-\sigma_{ij}\sigma_{ij}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(tr\,\sigma\right)^2-tr\left(\sigma^2\right)\right]=\frac{1}{2}\left[(12)^2-\left(36+16+4\right)\right]=44$$

$$III_\sigma=\varepsilon_{ijk}\sigma_{1i}\sigma_{2j}\sigma_{3k}=det\left(\sigma\right)=(6)(4)(2)=48$$

e) Les directions principales des contraintes

Pour $\sigma_1=6$: $\left(\sigma_{ij}-6\delta_{ij}\right)n_j=0\Rightarrow\begin{bmatrix}-3&-1&0\\-1&-3&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}-3n_1-n_2=0\\-n_1-3n_2=0\\0n_3=0\end{matrix}$

$n_2=n_1=0$ avec $n_1^2+n_2^2+n_3^2=1$, on trouve $n_3=\pm1$; $n_i=\left[0\,,\quad 0\,,\quad \pm1\right]$

Pour $\sigma_2=4$: $\left(\sigma_{ij}-4\delta_{ij}\right)n_j=0\Rightarrow\begin{bmatrix}-1&-1&0\\-1&-1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}-n_1-n_2=0\\-n_1-n_2=0\\2n_3=0\end{matrix}$

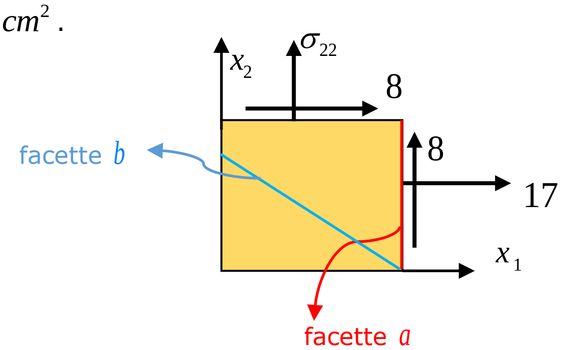
$n_3=0\quad n_2=-n_1$ avec $n_1^2+n_2^2+n_3^2=1$, on trouve $n_i=\left[\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\quad \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\quad 0\right]$

Pour $\sigma_3=2$: $\left(\sigma_{ij}-2\delta_{ij}\right)n_j=0\Rightarrow\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}n_1-n_2=0\\-n_1+n_2=0\\4n_3=0\end{matrix}$

$n_3=0\quad n_1=n_2$ avec $n_1^2+n_2^2+n_3^2=1$, on trouve $n_i=\left[\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\quad \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\quad 0\right]$

EX 2.

Sur la facette a on a $\sigma_N^{(a)}=17\,daN/cm^2$ et $\sigma_S^{(a)}=8\,daN/cm^2$.
Prenons cette facette comme facette de référence



Le tenseur de contrainte dans ce cas est:

$$\sigma_{ij}=\begin{bmatrix}17&8&0\\8&\sigma_{22}&0\\0&0&0\end{bmatrix}\quad ;\ \sigma_{22}\ \text{inconnue}$$

Pour la facette b faisant un angle de $60°$ par rapport à la facette a ,cherchons la composante normale du vecteur de contrainte $\sigma_N^{(b)}=t_i^{(n)}n_i=\sigma_{ij}n_jn_i$ avec le vecteur normal

$$n_i=\left(\cos60^\circ\quad\cos30^\circ\quad\cos90^\circ\right)=\left(\frac{1}{2}\quad\frac{\sqrt{3}}{2}\quad0\right)$$

$$\sigma_N^{(b)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 & 8 & 0 \\ 8 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = 6 \Rightarrow \sigma_{22} = -6.9 \ \ daN / cm^2$$

Cherchons le vecteur de contrainte sur la facette *(b)*

$$t_i^{(n)} \sigma_{ij} n_j = \begin{bmatrix} t_1^{(n)} \\ t_2^{(n)} \\ t_3^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 & 8 & 0 \\ 8 & -6.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15.43 \\ -1.97 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calculons la valeur de $\sigma_S^{(b)}$

$\left(\sigma_S^{(b)}\right)^2 = t_i^{(n)} t_i^{(n)} - \left(\sigma_N^{(b)}\right)^2 = (15.42)^2 + (1.97)^2 - 6^2 = 205.96$ alors $\sigma_S^{(b)} = 14.35 \ daN / cm^2$

EX 3.

La projection de $\underset{\sim}{t}^{(n)}$ sur la direction $\underset{\sim}{n}^*$ est donnée par $\underset{\sim}{t}^{(n)} \bullet \underset{\sim}{n}^*$ ou en notation indicielle $t_i^{(n)} \ n_i^*$. Avec la relation vecteur de contraintes-tenseur de contraintes $t_i^{(n)} = \sigma_{ij} n_j$

$t_i^{(n)} \ n_i^* = \sigma_{ij} n_j n_i^* = \sigma_{ij} n_i^* n_j = \sigma_{ji} n_i^* n_j = t_j^{(n^*)} n_j = t_i^{(n^*)} n_i = \underset{\sim}{t}^{(n^*)} \bullet \underset{\sim}{n}$

EX 4.

a) Les équations d'équilibre statique $\sigma_{ij,j} + \rho b_i = 0$ avec $\rho b_i = 0$

$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} = 0 \Rightarrow 2ax_1 + 4x_1 - 6x_1 = 0 \Rightarrow \quad a = 1$

$\sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{23,3} = 0 \Rightarrow 4x_2 + 2bx_2 = 0 \Rightarrow \quad b = -2$

$\sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3} = 0 \Rightarrow -6x_3 + 2cx_3 = 0 \Rightarrow \quad c = 3$

b) Le tenseur de contrainte au point *M* (1,1,0)

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

c) Le tenseur de contraintes sphérique et déviateur

La contrainte moyenne $\sigma_M = \frac{1}{3}\sigma_{ii} = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3} I_\sigma = \frac{1}{3}(1+1+7) = 3$

Le tenseur de contraintes sphérique

$$\delta_{ij}\sigma_M = \sigma_P = \begin{bmatrix} \sigma_M & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_M & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Le tenseur de contraintes déviateur

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} 1-3 & 3 & 0 \\ 3 & 1-3 & 0 \\ 0 & 0 & 7-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$