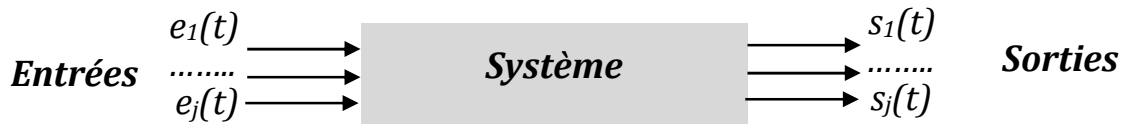


Chapitre I

Introduction aux systèmes non linéaires

Dans le cas général, un système peut posséder plusieurs entrées (causes) et plusieurs sorties (effets). Il est représenté par un bloc contenant le nom système.



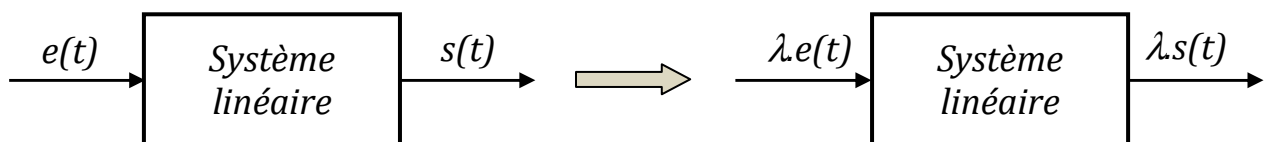
Afin de pouvoir étudier et améliorer les performances d'un système asservi il faut pouvoir établir un **modèle**, à partir duquel nous pourrions réaliser des simulations. Pour cela il est impératif de connaître la validité de ce modèle.

I.1 Linéarité

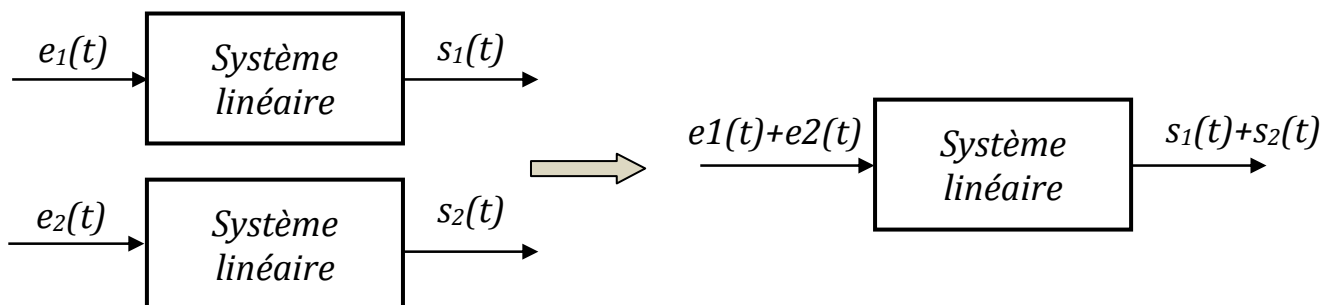
I.1.1 Système linéaire :

Un système est dit linéaire, si la fonction qui décrit son comportement est elle-même linéaire. Cette dernière vérifie alors les principes de proportionnalité et de superposition :

- **Principe de proportionnalité** : si $s(t)$ est la réponse à l'entrée $e(t)$ alors $\lambda \cdot s(t)$ est la réponse à l'entrée $\lambda \cdot e(t)$



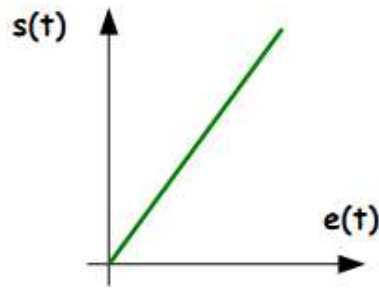
- **Principe de superposition** : si $s_1(t)$ est la réponse à l'entrée $e_1(t)$ et $s_2(t)$ est la réponse à l'entrée $e_2(t)$ alors $[s_1(t) + s_2(t)]$ est la réponse à l'entrée $[e_1(t) + e_2(t)]$



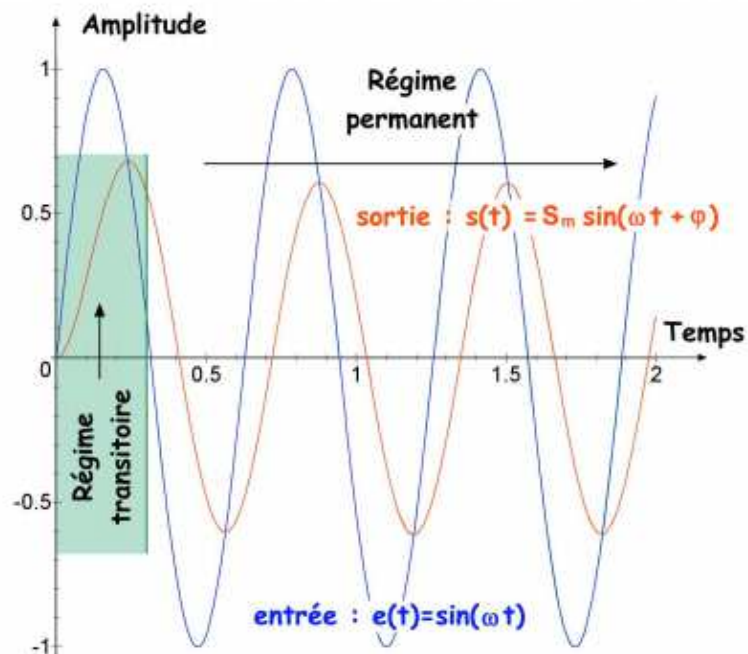
Définition : Un système est linéaire s'il est décrit par des équations différentielles linéaires d'ordre fini à coefficients constants.

Remarques

- **Relation entrée/sortie** : pour un système linéaire, en régime établi, la courbe représentative $s=f(e)$ est une droite. Attention : ne pas confondre avec la réponse d'un système en fonction du temps $s(t)$.



- **Nature de la sortie** : pour un système linéaire la réponse en régime établi est de même nature que l'entrée. La figure suivante montre la réponse d'un système linéaire à une entrée sinusoïdale. On peut constater qu'au-delà du régime transitoire la réponse est une sinusoïde d'amplitude différente et en retard par rapport à l'entrée.

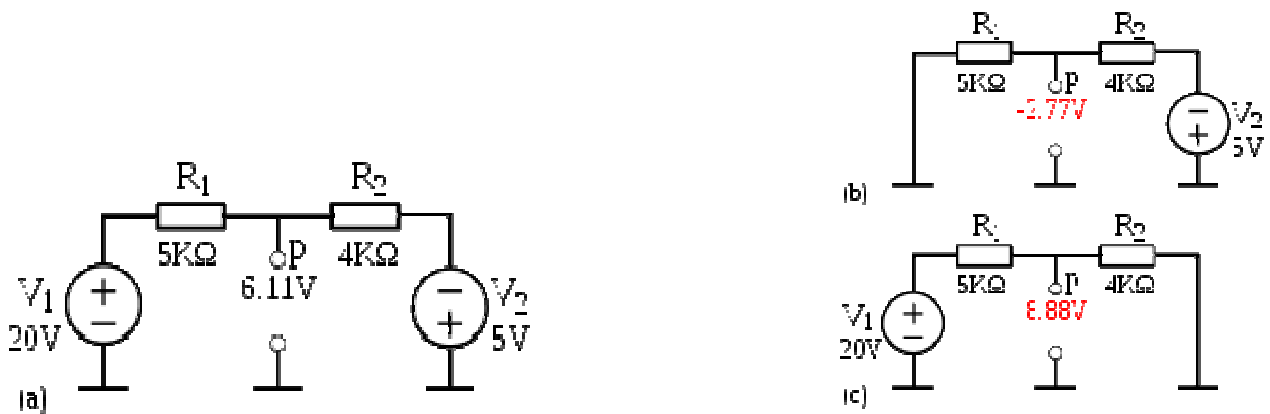


- **Equations différentielles** : les systèmes asservis sont des systèmes commandés, électromécaniques régis par des lois de la physique (dynamique, hydraulique, électricité...). Un système linéaire sera régi par des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Remarque : $y^{(n)} = \frac{d^n (y(t))}{dt^n}$; $a_0 + a_1 y^{(1)} + \dots + a_n y^{(n)} = b_0 + b_1 x^{(1)} + \dots + a_n x^{(m)}$

1.1.2 Exemples des Systèmes linéaires :

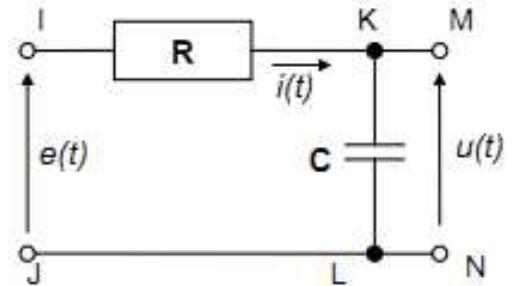
- Exemple1 : circuit électrique



L'addition (superposition) des valeurs obtenues, nous donne bien la tension au point P de notre circuit;
 $-2,77V + 8,88V = 6,11V$

- Exemple2 « système du 1^{er} ordre » Circuit RC

On considère le condensateur déchargé à l'instant $t=0$ et on note $e(t)$ et $s(t)$, les tensions respectives d'entrée et de sortie.



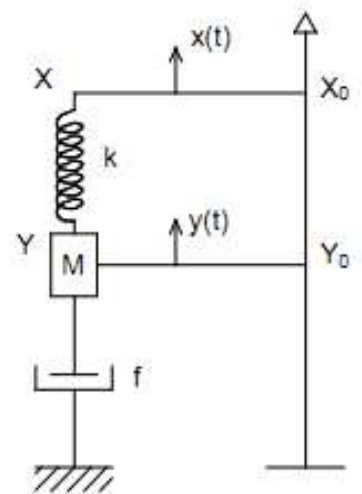
L'équation différentielle linéaire à coefficients constants est donnée par :

$$RC \cdot \frac{d[s(t)]}{dt} + s(t) = e(t)$$

- Exemple3 « système du 2^{ème} ordre » « système masse-ressort-amortisseur »

On considère : un solide M de masse m ; un ressort de raideur k ; un amortisseur de coefficient de frottement visqueux f .

$$m \cdot \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + f \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = kx(t)$$



I.2 Non-Linéarité

La plupart des systèmes physiques ne sont pas linéaires. En effet, de nombreuses situations conduisent à la *non-linéarité* :

- Loi entrée-sortie de chaîne cinématique non linéaire ;
- Phénomène de saturation ;
- Phénomène de seuil ;
- Hystérésis.

Tous ces phénomènes pourront être rencontrés lors des applications. Dans une situation de non-linéarité, il sera possible d'étudier le comportement du système sur une plage réduite par rapport au domaine d'utilisation, en *linéarisant* autour de la position étudiée. Un modèle de système linéaire pourra ainsi être utilisé.

I.3 Systèmes non linéaires

Par définition, un système non linéaire est un système qui n'est pas linéaire, c'est-à-dire (au sens physique) qui ne peut pas être décrit par des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Cette définition, ou plutôt cette non-linéarité explique la complexité et la diversité des systèmes non linéaires et des méthodes qui s'y appliquent. Il n'y a pas une théorie générale pour ces systèmes, mais plusieurs méthodes adaptées à certaines classes non linéaires.



H : opérateur transmittance du système

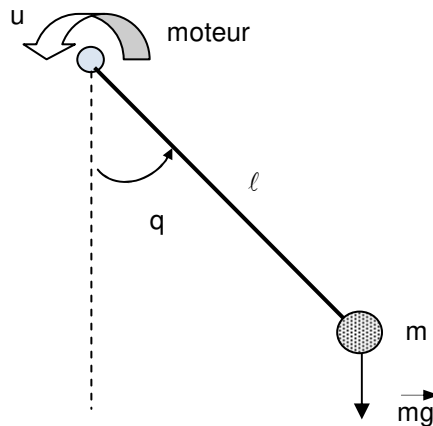
$$\text{Si : } e_1(t) \rightarrow s_1(t) = H.e_1(t)$$

$$\text{et } e_2(t) \rightarrow s_2(t) = H.e_2(t)$$

$$\text{alors : } e_3(t) = e_1(t) + e_2(t) \rightarrow H.(e_1(t) + e_2(t)) \neq s_1(t) + s_2(t)$$

1.3.1 Exemple d'un système non linéaire : « pendule simple »

On peut simuler un bras manipulateur à un pendule simple. C'est un système articulé à un degré de liberté de masse localisée m et son mouvement est commandé par u et peut être représenté par la figure suivante :



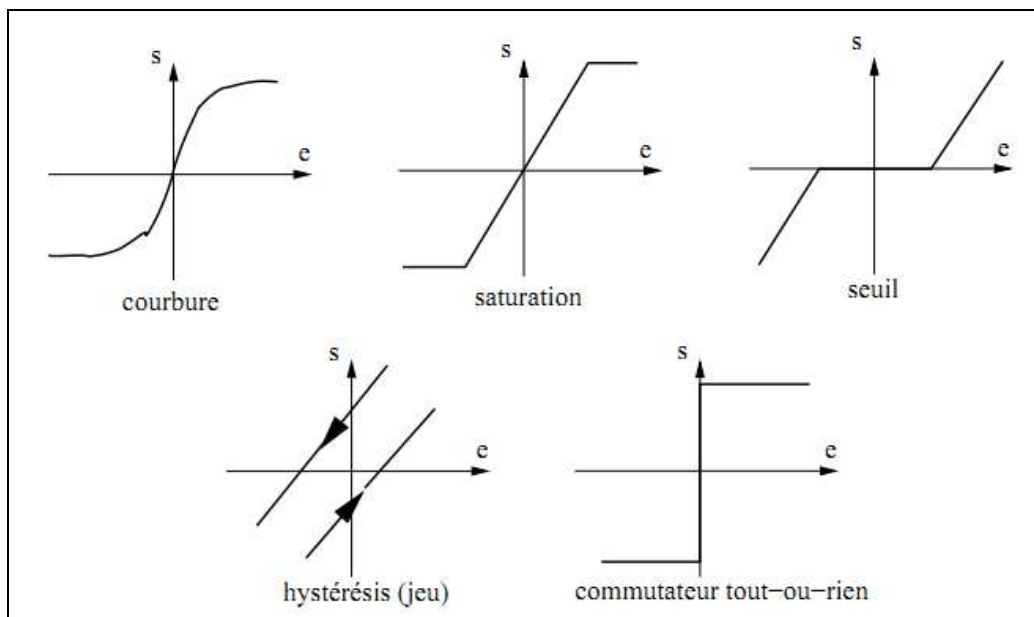
Structure du pendule simple

D'après l'expression de Lagrange, l'équation non linéaire du système sera exprimée par :

$$m l^2 \ddot{q} + mg l \cdot \sin q = u$$

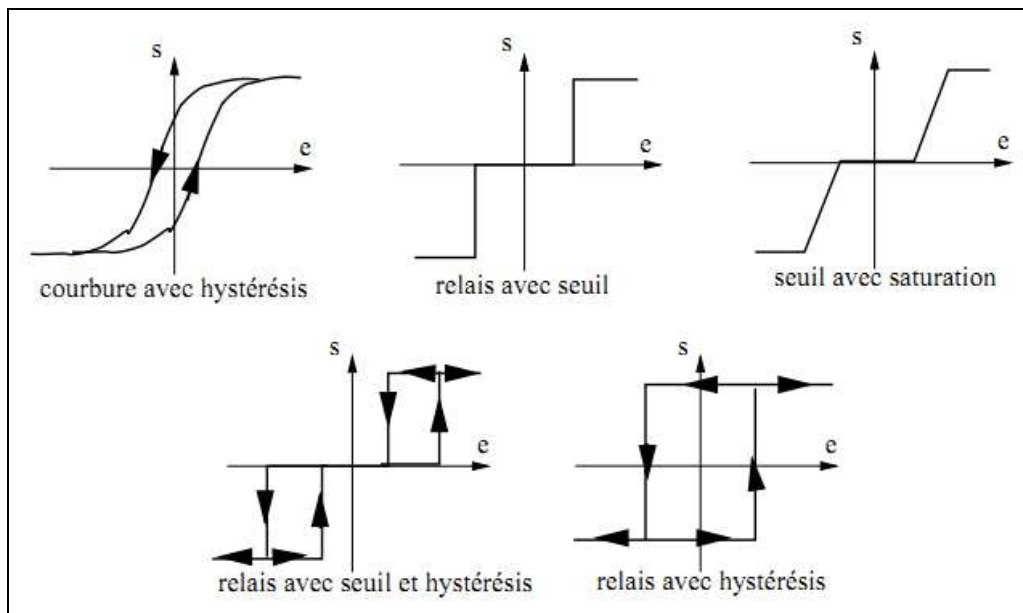
1.3.2 Non-linéarités dans les systèmes asservis

La caractéristique entrée/sortie d'un système présente fréquemment des distorsions dues aux non-linéarités des systèmes. Par exemple, un amplificateur présente une saturation, un pont de redressement présente des seuils en raison des seuils des diodes qui le composent.



Exemple de non linéarités

Ces cinq non-linéarités de base peuvent se combiner pour former des non linéarités plus complexes.



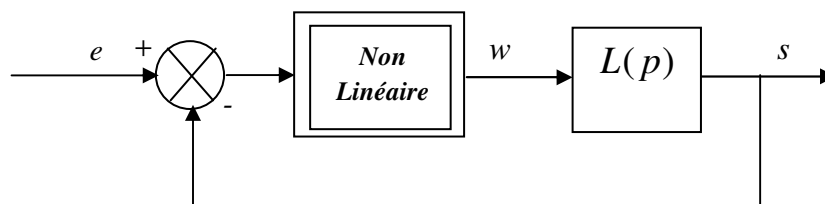
Combinaisons de non linéarités

Ces cinq non-linéarités et leurs combinaisons permettent de représenter à peu près tous les types de non linéarités rencontrés dans les systèmes asservis.

On peut classer les non-linéarités en plusieurs catégories selon leurs propriétés :

- des non-linéarités continues (courbures) ou discontinues (relais),
- des non-linéarités avec ou sans mémoire (toutes celles avec hystérésis),
- des non-linéarités accidentelles, c'est-à-dire dues aux imperfections des composants (saturation d'un amplificateur, jeu,...), ou essentielles, c'est-à-dire liées à la nature même du composant (relais).

L'introduction d'un phénomène non linéaire dans le modèle ne permet plus de déterminer facilement les performances, et exclut la représentation par fonction de transfert.



Exemple d'un Système asservi non linéaire canonique

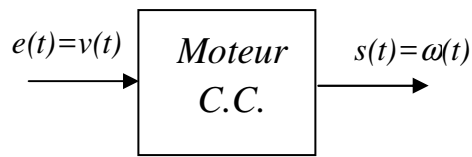
I.3.3 Exemples : « phénomènes non-linéarités »

- Exemple1 : **seuil** sur un moteur à courant continu

Une zone morte correspond à une plage de la grandeur d'entrée ne conduisant à aucune variation de la grandeur de sortie.

On peut dire que :

- Ce phénomène est courant dans les machines à courant continu, présentant du frottement au niveau des balais et dans la chaîne de transmission mécanique.
- Modélisation élémentaire du frottement sec : Le frottement sec est un phénomène non linéaire courant dans les systèmes mécaniques. Le modèle de seuil permet de rendre compte du frottement en imposant une force ou un couple constant, opposé à la vitesse de déplacement.



Moteur à courant continu

On montre que, pour un moteur à courant continu à commande d'induit et à aimants permanents, la relation entre la vitesse de rotation $\omega(t)$ et la tension de commande $v(t)$ est à couple constant : (avec R, f, K_c, K_t, J, L coefficients liés au moteur et au mécanisme).

$$v(t) = \frac{1}{K_T} \left[(R \cdot f + K_c K_T) \omega(t) + (RJ + Lf) \frac{d\omega(t)}{dt} + LJ \frac{d\omega^2(t)}{dt^2} \right]$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants de la forme :

$$v(t) = A \cdot \omega(t) + B \cdot \frac{d\omega(t)}{dt} + C \cdot \frac{d\omega^2(t)}{dt^2}$$

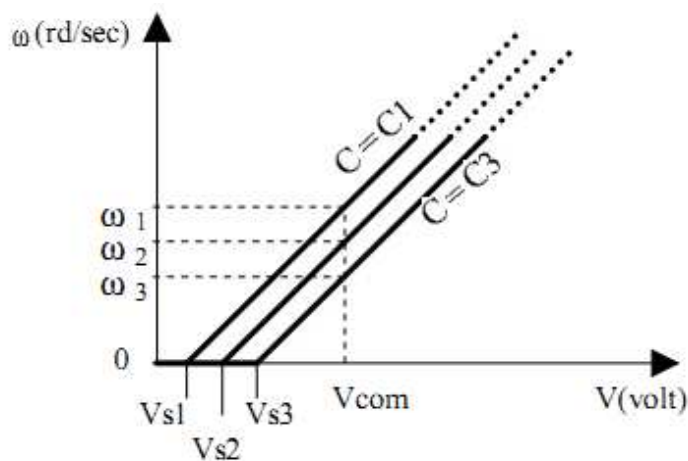
Le régime permanent correspondant à une vitesse stabilisée dont les dérivées sont nulles.

$$\omega(t) = \text{Constante} \Rightarrow \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d\omega^2(t)}{dt^2} = 0$$

La relation en régime permanent se réduit alors à : $v(t) = A \cdot \omega(t)$ qui est une relation linéaire entre la commande en tension et la vitesse obtenue pour un couple donné.

La famille de caractéristiques est représentée par la figure suivante, pour différentes valeurs du couple, soit $C1, C2$ et $C3$. Dans le cas du moteur à vide (couple résistant $C1$), le couple de frottement sec s'oppose à la mise en mouvement du rotor lors du démarrage. Tant que la commande est trop petite pour que le couple moteur soit supérieur au couple de frottement sec, le moteur est immobile (le couple moteur est proportionnel à l'intensité du courant traversant les bobinages, elle-même limitée lorsque la tension est faible). C'est une zone de non-linéarité. Dès que la commande dépasse le seuil V_{SI} , la caractéristique tension/vitesse du moteur est linéaire.

Pour une tension de commande identique V_{com} , la vitesse obtenue est différente suivant la valeur du couple, respectivement ω_1 , ω_2 et ω_3 pour $C1$, $C2$ et $C3$. On remarque que la caractéristique n'a pas de maximum ; en effet, un moteur C.C. ne possède pas de limitation intrinsèque de vitesse (sauf la destruction mécanique ou thermique.), cette dernière étant réalisée en pratique par le variateur associé au moteur.

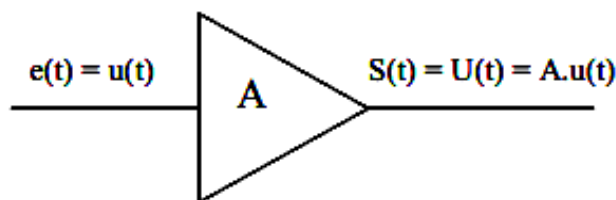


• Exemple2 : **Saturation** sur un amplificateur

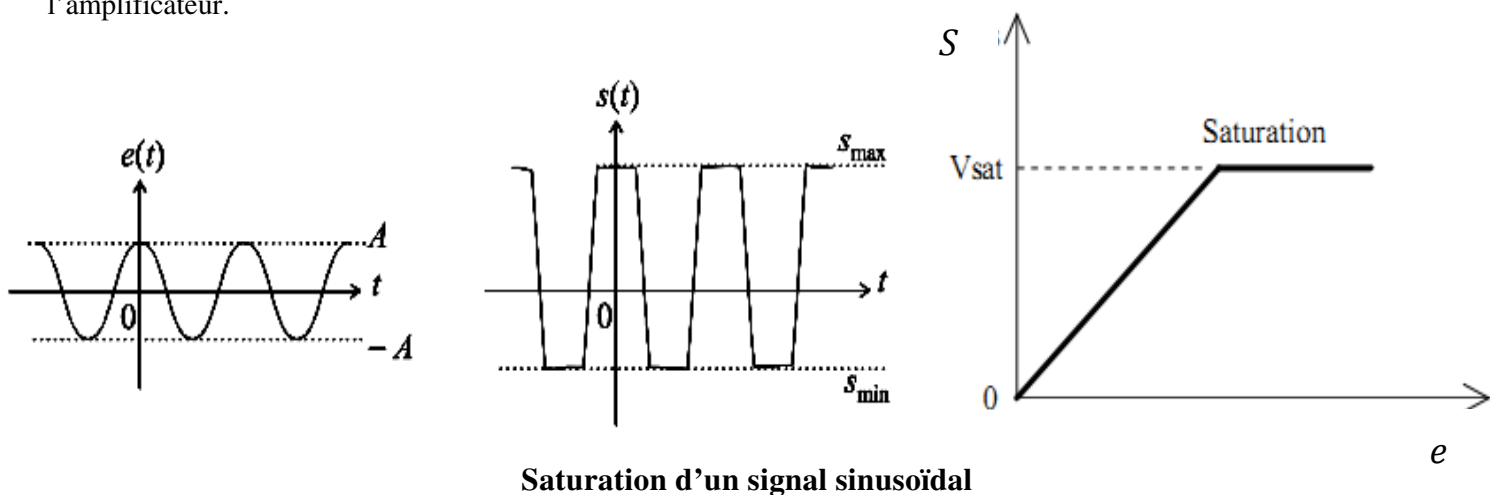
Ce phénomène traduit une limite positive ou négative d'une grandeur physique dans le système. Les limites sont généralement symétriques mais ce n'est pas obligatoire.

- Les limites de déplacement d'un mobile : Un chariot peut suivre une consigne de déplacement dans une plage de longueur mais arrive en butée au delà des limites matérielles.

Prenons l'exemple de L'ampli soumis à une tension d'entrée $u(t)$ qui délivre une tension de sortie proportionnelle $U(t)=A.u(t)$. soumis à une tension d'entrée $2.u(t)$, il délivrerait une tension de sortie $2A.u(t)$



Pour tout système, il y a une limite de la grandeur d'entrée au-delà de laquelle la grandeur de sortie ne progresse plus : c'est la saturation en courant d'un amplificateur opérationnel par exemple. La figure suivante donne l'allure de la partie positive de la réponse (soumis à une tension négative, l'ampli se comporte de la même manière avec saturation). Bien évidemment, la tension de sortie saturée sera toujours inférieure à la tensio d'alimentation de l'amplificateur.

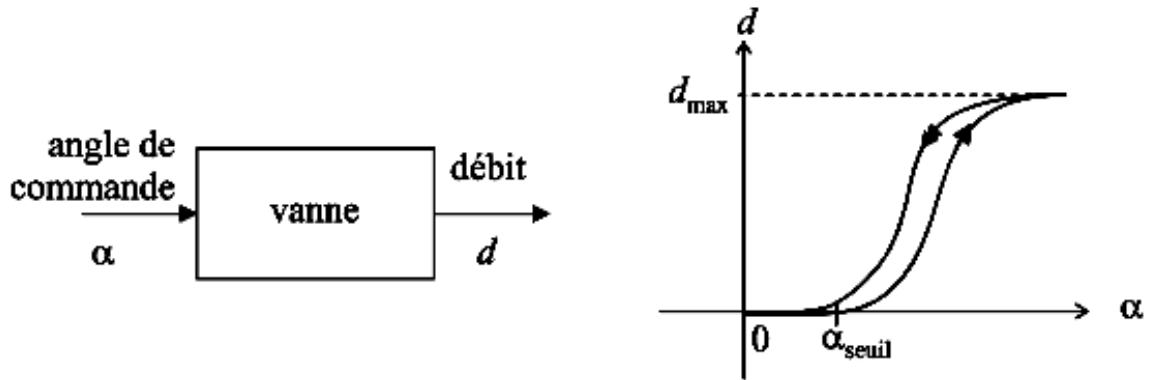


- Exemple3 : **Courbure et hystérésis** sur une vanne ou électrovanne

Le phénomène d'hystérésis est une non linéarité conduisant à ne pas parcourir le même chemin lorsque la grandeur d'entrée croît, puis décroît.

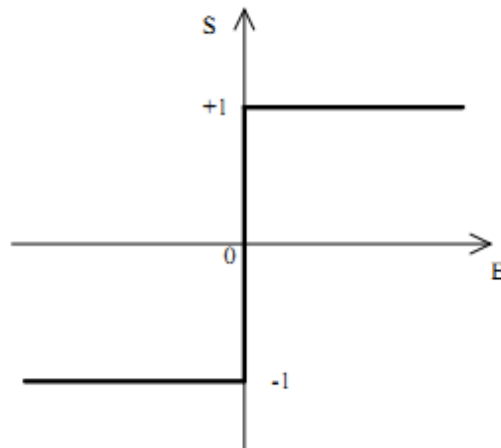
Pour une électrovanne, la différence entre deux débits pour une même valeur du signal électrique d'entrée. L'une des deux valeurs de débit étant atteinte en montant (augmentation du signal électrique d'entrée) l'autre en descendant (réduction du signal électrique d'entrée). L'hystérésis est exprimée en pourcentage du débit maximal.

Si on diminue l'angle, le jeu mécanique est responsable d'un phénomène d'hystérésis : le débit ne recommence à décroître que lorsque l'on a rattrapé le jeu mécanique.



- Exemple4 : « **tout ou rien** » Relais à deux positions

Si l'on considère un constituant dont la valeur de la sortie possède une grandeur constante et indépendante de la grandeur de l'entrée au signe près, on obtient par exemple la caractéristique suivante. C'est un fonctionnement en plus ou moins qui est non-linéaire.



I.4 Quelques comportements non linéaires

Les systèmes non linéaires sont décrits par des équations différentielles non linéaires. Ils sont caractérisés par les propriétés suivantes :

- (1) **Principe de superposition** n'est pas applicable,
- (2) **Points d'équilibre multiples** : un système non linéaire présente plusieurs points d'équilibre isolés (pour le système linéaire, le point d'équilibre est unique),
- (3) **Limite de cycle** : les systèmes non linéaires peuvent présenter des oscillations à amplitudes et fréquences fixes en l'absence d'une entrée exogène (ce qui est extérieur à un système) ; ces oscillations sont appelées cycles limites,
- (4) **Bifurcation** : la théorie de la bifurcation a montré que le changement quantitatif des paramètres du système entraîne un changement qualitatif dans son comportement, ainsi la stabilité peut être affectée par ce changement quantitatif,
- (5) **Chaos** : les systèmes non linéaires présentent un phénomène chaotique qui est défini par la sensibilité de la sortie vis-à-vis des valeurs initiales,
- (6) **Temps d'échappement fini** : l'état d'un système non linéaire instable peut aller à l'infini en un temps fini,
- (7) **Oscillations sous harmoniques, harmoniques ou apériodiques** : pour une entrée sinusoïdale, le signal de sortie peut contenir de nombreux harmoniques et sous-harmoniques avec amplitudes et déphasages différents (la sortie d'un système linéaire ne contiendra qu'une sinusoïde à la sortie).

I.4.1 Points d'équilibre multiples

Le point $x_e \in \mathcal{R}$ est dit point d'équilibre du système non linéaire non forcé :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x(t), t) && ; \forall t \geq 0 \\ \dot{x} &= f(x_e, t) = 0 && ; \forall t \geq 0\end{aligned}$$

et admet une solution :

$$\dot{x} = f(x(t), t) , \forall t \geq t_e \quad ; \quad x(t_e) = x_e$$

Exemple :

Soit le système modélisé par l'équation différentielle suivante :

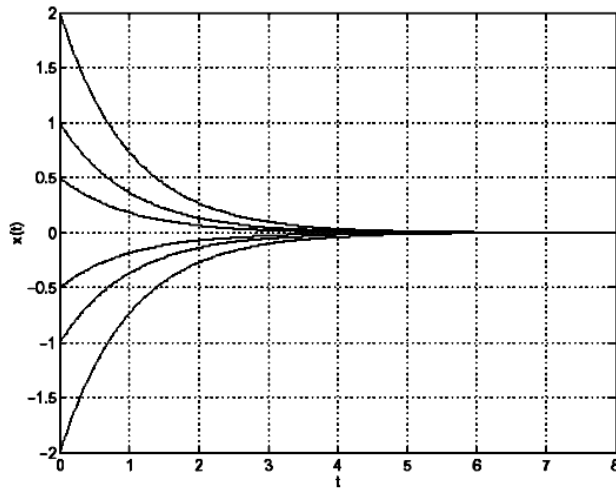
$$\dot{x} = -x(t) + x^2(t)$$

Pour déterminer les points d'équilibre, on annule la dynamique des états ($\dot{x} = 0 \Rightarrow -x + x^2 = 0$):

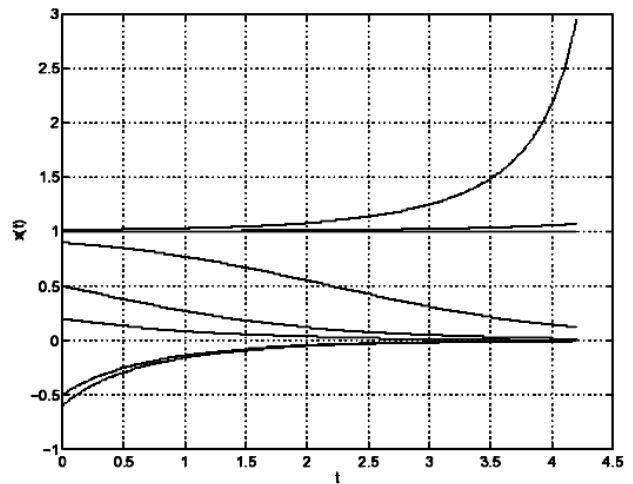
On remarque que le système possède deux points d'équilibre : $x=0$ et $x=1$

Pour $0 \leq x < 1$, $-x$ domine x^2 ($\dot{x} \approx -x(t)$) et le système aura un comportement linéaire la solution converge vers zéro.

Pour $x \geq 1$ x^2 domine $-x$ et le système aura un comportement non linéaire et la solution diverge en un temps fini.



Solution du système linéarisé



Solution du système non linéaire

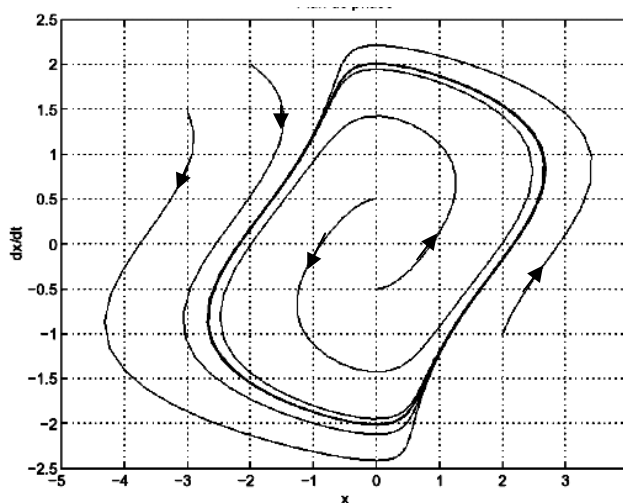
Conclusion :

- Dans le cas linéaire, le point d'équilibre est stable et les trajectoires d'état pour différentes conditions initiales $x(0)$ décroissent vers l'état d'équilibre.
- Dans le cas non linéaire, le point d'équilibre 0 est stable localement puisque à partir de toutes conditions initiales proches de 0 (appartenant à une boucle fermée dans l'espace topologique autour de 0) la solution converge vers 0, mais le système est instable autour de 1 puisque la trajectoire tend vers 0 sauf pour $x_0=1$.

1.4.2 Cycles limites

Soit l'oscillateur non linéaire suivant : $m\ddot{x}(t) + 2c(x^2 - 1)\dot{x}(t) + k.x(t) = 0$, $c > 0$

La simulation de cette équation sous Matlab, nous donne le résultat suivant. On représente en ordonnée la variation de la dérivée \dot{x} en fonction de l'état x (plan de phase).



Plan de phase : Solution de l'équation de Van Der Pol pour différentes CI

Conclusion : Cette courbe fermée traduit un cycle limite, on retourne sur le même cycle, quelque soit la condition initiale choisie.

1.4.3 Bifurcations

Soit un système non linéaire défini par l'équation non linéaire suivante (équation non amortie de Duffing) :

$$\ddot{x}(t) + \alpha \cdot x(t) + x^3(t) = 0$$

Selon les valeurs du paramètre α , le nombre de points d'équilibre varie :

- Pour $\alpha=0$, on aura un seul point d'équilibre. $x=0$
- Pour $\alpha \neq 0$, on aura trois points d'équilibre : $x = 0$; $x = -\sqrt{-\alpha}$ et $x = +\sqrt{-\alpha}$. On a ainsi une **bifurcation**

Lors d'une bifurcation, la trajectoire peut évoluer en faisant apparaître :

- D'autres points d'équilibre
- Une période multiple à la période du signal avant bifurcation

1.4.4 Chaos

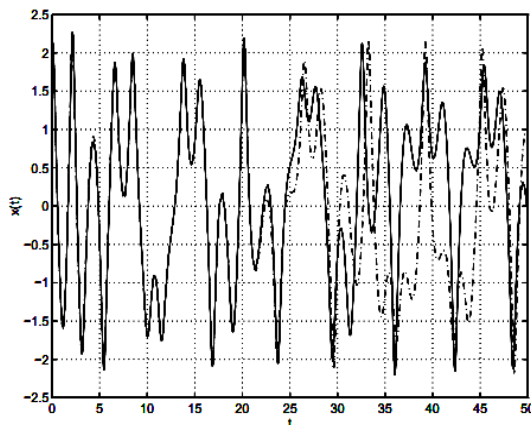
Un système non linéaire peut avoir un comportement en régime permanent plus complexe que ceux habituellement répertoriés tels que l'équilibre, les oscillations périodiques..

Dans ce cas, la sortie du système est extrêmement sensible aux conditions initiales, d'où la non prévisibilité de la sortie. Certains comportements chaotiques font ainsi apparaître un aspect aléatoire malgré leur nature déterministe intrinsèque.

Exemple :

$$\ddot{x}(t) + 0,1\dot{x}(t) + x^5(t) = 6 \cdot \sin(1)$$

Pour les deux conditions initiales différentes suivantes, nous obtenons les deux courbes présentées sur la figure.



Trait - : $(x(0) = 2 ; \dot{x}(0) = 3)$ et Trait -.- : $(x(0) = 2.01 ; \dot{x}(0) = 3.01)$

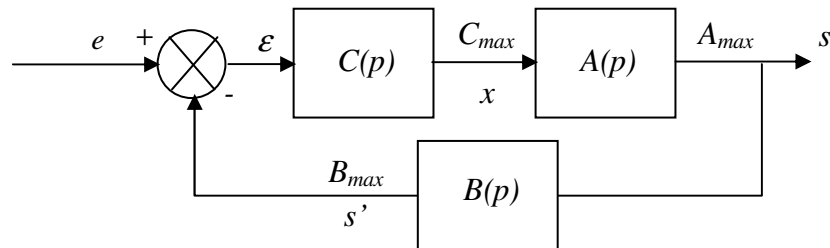
Comportement chaotique

Certains de ces phénomènes manifestent des comportements de type aléatoire en dépit de la nature déterministe du système. Ce comportement est présent dans les phénomènes de turbulences en mécanique des fluides ou dans les phénomènes issus des dynamiques atmosphériques.

I.5 Détermination du domaine de linéarité d'un système asservi

Les amplificateurs ne sont pas les seuls organes présentant un phénomène de saturation. En réalité, tous les systèmes physiques, qu'ils soient électriques, électroniques, mécanique, etc. sont caractérisés par ce phénomène. Ainsi, en mécanique, les butées qui bloquent le mouvement d'une pièce se traduisent par une saturation.

Dans une boucle d'asservissement composée de plusieurs éléments, chacun d'entre eux possède sa propre limitation en sortie. Dans l'exemple suivant, les organes de fonctions de transferts $A(p)$, $B(p)$ et $C(p)$ sont ainsi caractérisés par des valeurs maximales de leurs sorties respectives : A_{max} , B_{max} et C_{max} .



Saturation des sorties de chaque élément d'une boucle

Chacune des valeurs maximales de sortie des différents éléments impose une valeur maximale de son entrée. Au final, toutes ces contraintes imposent une limitation du signal d'entrée.

En supposant que e , ε , x , s et s' représentent les amplitudes de signaux qui sont tous sinusoïdaux, on peut ainsi, dans notre exemple, écrire les différentes contraintes liées aux saturations éventuelles que l'on cherche, bien évidemment, à éviter :

$$s < A_{max} \Rightarrow x < \frac{A_{max}}{A(\omega)} \Rightarrow \varepsilon < \frac{A_{max}}{A(\omega)C(\omega)}$$

Par ailleurs :

$$x < C_{max} \Rightarrow \varepsilon < \frac{C_{max}}{C(\omega)}$$

de plus :

$$s' < B_{max} \Rightarrow \varepsilon < \frac{B_{max}}{B(\omega)}$$

d'où :

$$x < \frac{B_{max}}{A(\omega)B(\omega)} \Rightarrow \varepsilon < \frac{B_{max}}{A(\omega)B(\omega)C(\omega)}$$

On se rend ainsi compte que chaque saturation éventuelle impose une contrainte différente sur l'amplitude de l'écart ε .

Comme $\varepsilon = e - s'$, ces contraintes sur l'écart se répercutent sur le signal d'entrée. Attention, toutefois, la valeur maximale de l'écart correspond à :

$$\varepsilon_{max} < e_{max} - B_{min}$$

On doit avoir simultanément :

$$e < \frac{A_{max}}{A(\omega)C(\omega)} + B_{min}$$

$$e < \frac{C_{max}}{C(\omega)} + B_{min}$$

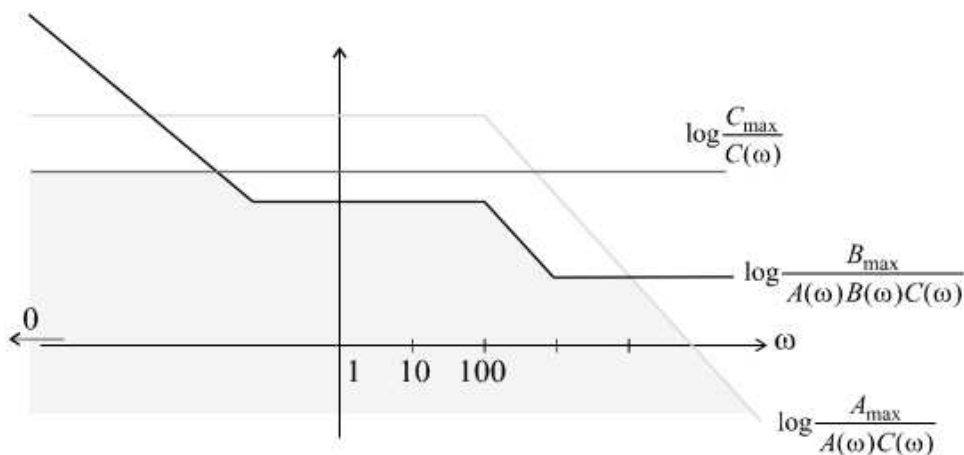
$$e < \frac{B_{max}}{A(\omega)B(\omega)C(\omega)} + B_{min}$$

Dans le cas fréquent où $B_{min}=0$, ces inéquations deviennent :

$$e < \frac{A_{max}}{A(\omega)C(\omega)}$$

$$e < \frac{C_{max}}{C(\omega)}$$

$$e < \frac{B_{max}}{A(\omega)B(\omega)C(\omega)}$$



Il est possible de tracer, sur un diagramme amplitude-fréquence, les différentes courbes ainsi mises en évidence. Pour garantir un fonctionnement linéaire à l'ensemble du système, l'amplitude de la sinusoïde d'entrée doit se trouver obligatoirement en dessous de la courbe la plus basse. Dans le cas d'un signal quelconque, on définit ainsi une zone de linéarité à l'intérieur de laquelle doit se situer le spectre du signal d'entrée.

Pour les mêmes raisons de commodité que dans le cas des diagrammes de Bode, on choisit de porter en ordonnée, le logarithme de chaque expression et en abscisse, la pulsation ω selon une échelle logarithmique.

I.6 Asservissements non linéaires séparables

Considérons une boucle d'asservissement comportant plusieurs éléments dont certains peuvent être pourvus d'un modèle de fonctionnement linéaire et dont les autres seront considérés comme non linéaires.

Le système est considéré comme séparable s'il est possible d'isoler, dans le modèle de fonctionnement global de la boucle, les éléments linéaires possédant une fonction de transfert, d'une part, et les éléments possédant une caractéristique $s=f(e)$ non linéaire et indépendante de la fréquence, d'autre part.

Le modèle de boucle d'asservissement non linéaire usuellement adopté consiste à isoler la non linéarité dans la chaîne directe, immédiatement après le soustracteur, sous la forme d'une fonction $x=N(\varepsilon)$ correspondant à la caractéristique non linéaire identifiée (élément non linéaire statique). L'amplitude du signal de sortie x ne dépend que de l'amplitude du signal d'entrée ε .

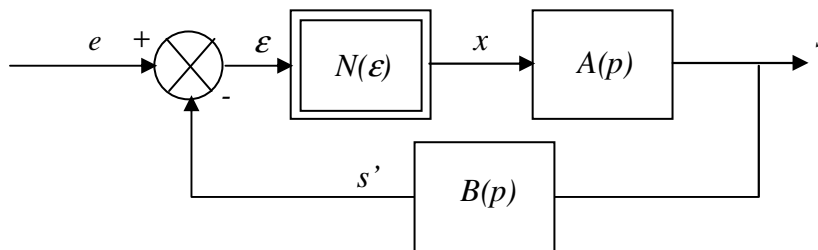


Schéma général d'une boucle d'asservissement non linéaire

Ce système est régi par les équations suivantes :

$$x = N(\varepsilon)$$

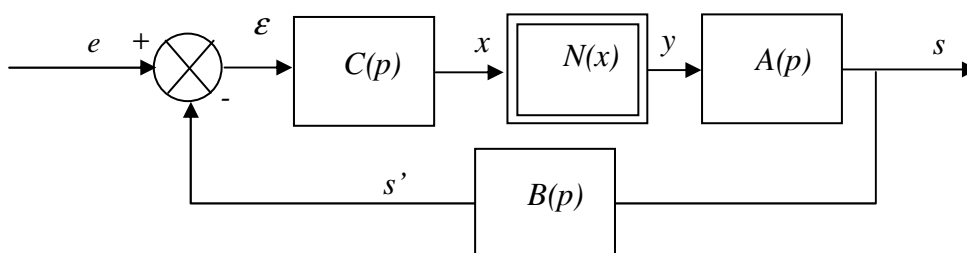
$$S(p) = A(p) X(p)$$

$$S'(p) = B(p) S(p)$$

$$\varepsilon(p) = E(p) - B(p) S(p)$$

Si un élément non linéaire est placé en un autre endroit de la boucle, il est nécessaire, pour que les méthodes d'étude que nous allons aborder ultérieurement soient applicables, de transformer le schéma de la boucle pour le ramener en amont de la chaîne directe.

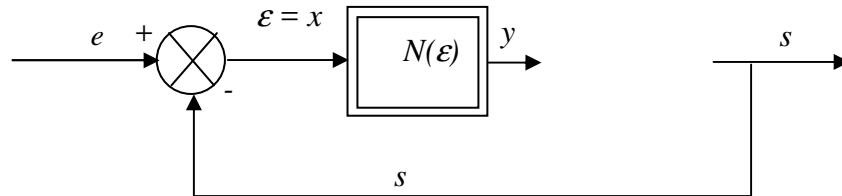
Considérons par exemple, la boucle représentée par la figure suivante :



La méthode consiste à transformer cette boucle en préservant d'une part l'intégrité de l'élément non linéaire qui sera placé immédiatement derrière le soustracteur et d'autre part la loi de fonctionnement du système, autrement dit l'expression de $S(p)$.

Première étape :

On commence la construction de ce nouveau schéma équivalent au premier en plaçant l'élément $N(x)$ derrière le soustracteur tout en prévoyant un retour unitaire (voir figure).



A partir de ce schéma incomplet, on peut déjà écrire :

$$X(p) = E(p) - S(p)$$

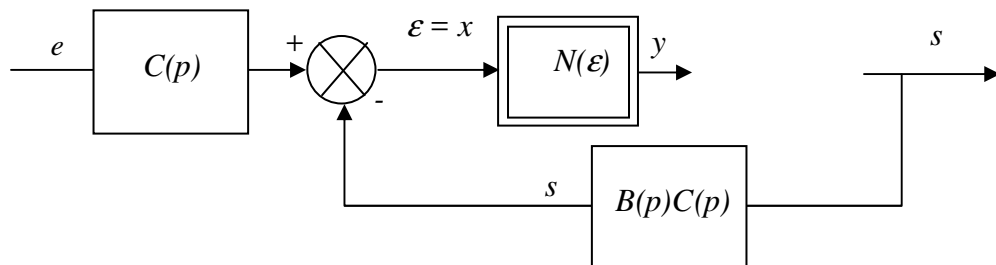
Ce qui n'est bien évidemment pas conforme au schéma initial dans lequel on avait :

$$X(p) = C(p)\epsilon(p) = C(p)[E(p) - B(p)S(p)]$$

$$X(p) = C(p)E(p) - C(p)B(p)S(p)$$

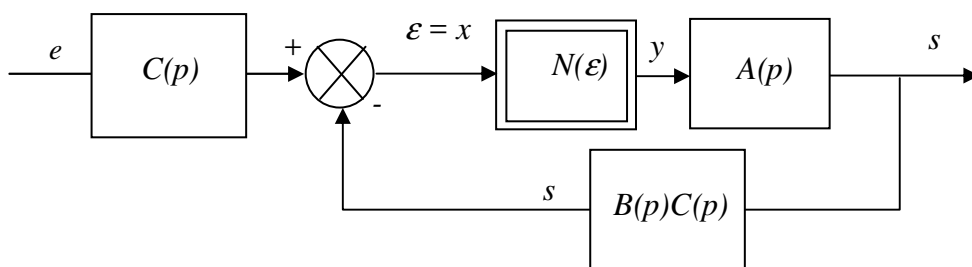
Deuxième étape :

Pour que le schéma de la figure redevienne conforme à cette équation, il faut multiplier $E(p)$ par $C(p)$ et multiplier le signal $S(p)$ par $B(p).C(p)$.



Troisième étape :

On complète alors le schéma avec l'élément qui lie le signal y à la sortie, élément qui lui, reste inchangé. La figure suivante correspond maintenant au schéma équivalent recherché.



1.6.1 Remarque importante

Attention aux **transformations interdites** : on ne doit pas intervertir un bloc linéaire avec un bloc non linéaire, car la réponse de l'élément non linéaire dépend de l'amplitude. Ainsi, par exemple le schéma 1 ne peut pas être transformé dans le schéma 2 :

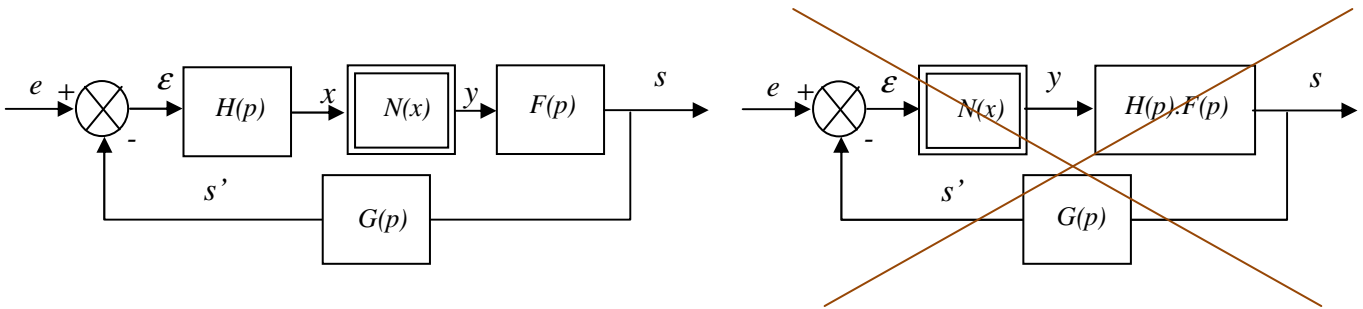
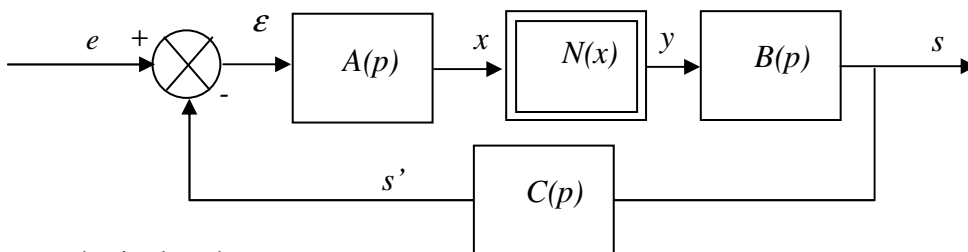


Schéma (1) : Système asservi non réduit

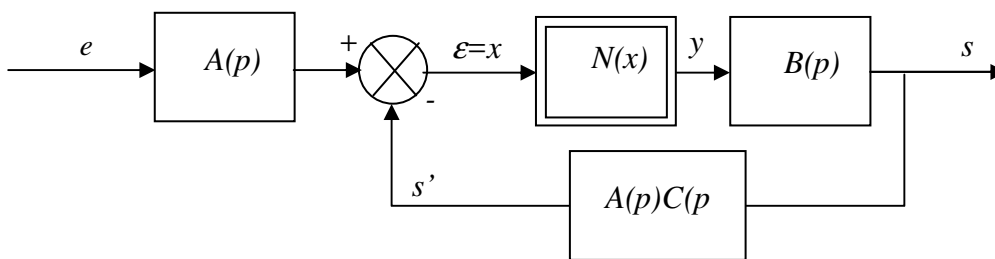
Schéma (2) : Transformation interdite

1.6.2 Comment réduire un système asservi non linéaire

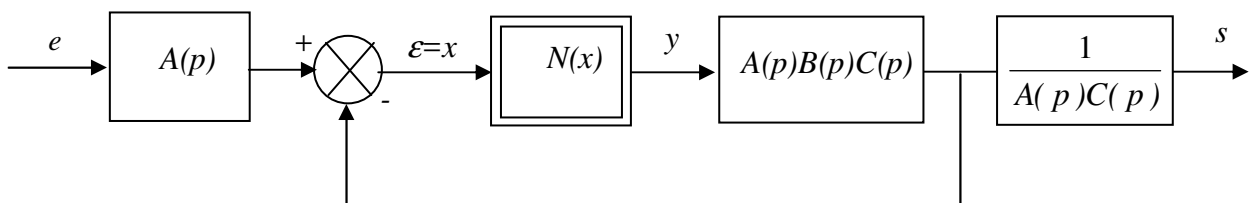
1.6.2.1 Mettre l'élément non linéaire après le comparateur



Le schéma est équivalent à :



1.6.2.2 Avoir un retour unitaire (forme réduite)



I.7 Linéarisation des systèmes non linéaires

Il s'agit d'étudier le comportement des trajectoires, au voisinage des points stationnaires, d'un système. Soit le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

où les fonctions f_1 et f_2 admettent des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre 2.

et la matrice Jacobiéenne :
$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

La matrice jacobienne, évaluée en un point stationnaire (x_1^*, x_2^*) donne une approximation linéaire du comportement du système au voisinage de ce point.

Exemple 1 :
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 + x_2^2 - 1 \end{cases}$$

- *Calcul des points stationnaires* : On annule les dérivées:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

On cherche les points stationnaires (x_1^*, x_2^*) pour lesquels les deux dynamiques soient nulles.

Ce système aura donc deux solutions possibles: $(0,1)$ et $(0,-1)$.

- *La matrice Jacobiéenne* :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{pmatrix}$$

- *Linéarisation autour du point stationnaire $(0,1)$*

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et le système linéarisé est } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = 2x_2 \end{cases}$$

- *Linéarisation autour du point stationnaire $(0,-1)$*

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ et le système linéarisé est } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \end{cases}$$

Exemple 2 :
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1(1-x_1^2) + x_2 \end{cases}$$

- *Calcul des points stationnaires* : On annule les dérivées:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 = 0 \\ \dot{x}_2 = x_1(1-x_1^2) + x_2 = 0 \end{cases}$$

On cherche les points stationnaires (x_1^*, x_2^*) pour lesquels les deux dynamiques soient nulles.

Ce système aura donc trois solutions possibles: $(0,0)$, $(1,0)$ et $(-1,0)$.

- *La matrice Jacobiënne* :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-3x_1^2 & 1 \end{pmatrix}$$

- *Linéarisation autour du point stationnaire $(0,0)$*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et le système linéarisé est } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases}$$

- *Linéarisation autour du point stationnaire $(1,0)$*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et le système linéarisé est } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + x_2 \end{cases}$$

- *Linéarisation autour du point stationnaire $(-1,0)$*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et le système linéarisé est } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + x_2 \end{cases}$$