Chapitre II

Stabilité des systèmes non linéaires

Pour mieux voir les principaux concepts et définitions de la stabilité des systèmes non linéaires, il faut comprendre le phénomène d'équilibre stable et instable dans les structures.

II.1 Etats d'équilibre stable et instable

L'équilibre d'un système mécanique est stable si, lorsque l'on déplace les points du système de leur position d'équilibre d'une quantité infinitésimale et en leur donnant à chacun d'eux une faible vitesse initiale, les déplacements des différents points du système restent, pendant le déplacement, contenus dans des limites imposées faibles.

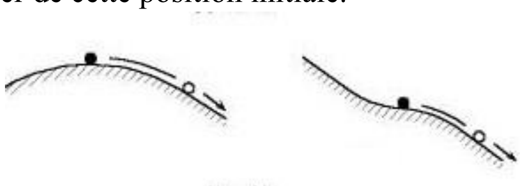
Pour mieux éclaircir ce sujet, on va parler de deux points :

- Equilibre d'un système physique ;
- Définir le ou les points d'équilibre d'un système ;

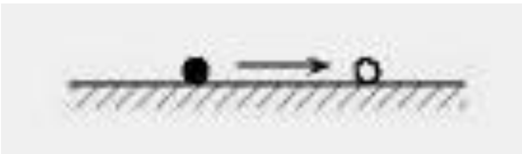
II.1.1 Equilibre d'un système

Équilibre stable : état dans lequel un corps légèrement écarté de sa position d'équilibre sous l'effet d'une action perturbatrice très petite tend à y revenir de lui-même.

Equilibre instable : état dans lequel un corps légèrement écarté de sa position initiale sous l'effet d'une action perturbatrice tend à s'écarter de cette position initiale.



Equilibre indifférent : état dans lequel un corps ne manifeste aucune tendance à quitter la nouvelle position qui lui est assignée.



Condition d’équilibre d’un système : Dans le cas où le système est soumis à une force $\vec{F}$, on sait d'après les lois de Newton que le système sera en état d’équilibre (système libre) si $\vec{F} = \vec{0}$ (et le moment des forces est nul).

Energie mécanique d’un système équilibré : Le système équilibré possède une énergie mécanique conservée. On écrit l'expression de l'énergie mécanique :

$$E_m = E_p + E_c = \text{Constante}$$

II.1.2 Définitions de point d’équilibre et solutions

Avec le modèle mathématique d’un système, on va a étudier deux exemples d’équations différentielles pour traiter deux approches, la résolution explicite de l’équation et son étude qualitative (ou géométrique).

Considérons une variable $x(t)$ exemple : déplacement, vitesse, position angulaire, vitesse angulaire, débit, ...) qui varie au cours du temps et sa dérivée $\dot{x}(t)$ (système non autonome). Supposons qu’on soit conduit à postuler une relation entre cette variable et sa dérivée de la forme :

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t))$$

> *Remarque* : Ce système est dit autonome si f ne dépend pas explicitement de t (dépend seulement de la variable x). Dans ce cas, on l’écrira : $\frac{dx}{dt} = f(x)$

2.1.2.a/ Solutions du système

1er Exemple « système linéaire »

Soit l’équation différentielle $\dot{x}(t) = r.x(t)$ avec $f(x) = r.x$ une fonction linéaire. L’ensemble de ses solutions s’écrit : $x(t) = x(0).e^{r.t}; x(0) \in R$. Notons qu’il y en a une infinité, autant que de valeurs possibles pour la condition initiale $x(0)$.

2ème Exemple « système non linéaire »

Soit l’équation différentielle $\dot{x}(t) = r.x(t).\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)$ avec $f(x) = r.x.\left(1 - \frac{x}{K}\right)$ une fonction non linéaire. L’ensemble de ses solutions s’écrit : $x(t) = \frac{x(0).K}{x(0) + (K - x(0)).e^{-r.t}}; x(0) \in R$. Il y a aussi une infinité de solutions.

2.1.2.b/ Calcul des équilibres

Pour une équation différentielle de la forme $\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t))$, on appelle ***équilibre*** ou ***état stationnaire*** une valeur constante x^* de la variable x telle que si $x(0) = x^*$ alors $x(t) = x^*$ pour tout t (la variable reste à l'équilibre). Un équilibre est donc une solution constante de l'équation différentielle. Une telle solution a nécessairement une <u>*dérivée nulle*</u>, c'est-à-dire que l'on a $f(x^*) = 0$; en d'autres termes x^* est aussi un zéro de la fonction f.

- Pour le modèle $\dot{x}(t) = r.x(t)$, il y a un seul point d'équilibre $x^* = 0$.
- Pour le modèle $\dot{x}(t) = r.x(t).\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)$, il y a deux points d'équilibre $x^* = 0$ et $x^{**} = K$.

Dans un modèle général du type $\dot{x} = f(x)$, il y a donc autant d'équilibres différents qu'il y a de zéros différents de la fonction *f*. On peut donc visualiser les différents équilibres de l'équation en traçant le graphe de la fonction *f*. Les équilibres sont alors les abscisses des points d'intersection du graphe avec l'axe horizontal (qui est ici l'axe des x).

2.1.2.c/ Stabilité des équilibres

Ce graphe permet en outre de visualiser, sur son axe horizontal, un schéma de la dynamique : il suffit de mettre une flèche dans le sens des x croissants sur les segments de l'axe où $f > 0$ (c'est-à-dire où le graphe de *f* est au dessus de l'axe) et une flèche dans le sens des x décroissants sur les segments de l'axe où $f < 0$. Parfois ce schéma de la dynamique est suffisant et peut remplacer une résolution explicite de l'équation (qui, de toute façon, est bien souvent impossible).

On dit qu'un équilibre x^* pour lequel on a $f'(x)^* < 0$ est un équilibre stable car dans ce cas l'évolution de toute solution dont la condition initiale est proche de l'équilibre x^* est de s'en rapprocher. De façon analogue, on dit qu'un équilibre x^* pour lequel on a $f'(x) > 0$ est un équilibre instable car dans ce cas l'évolution de toute solution dont la condition initiale est proche de l'équilibre x^* est de s'en éloigner.

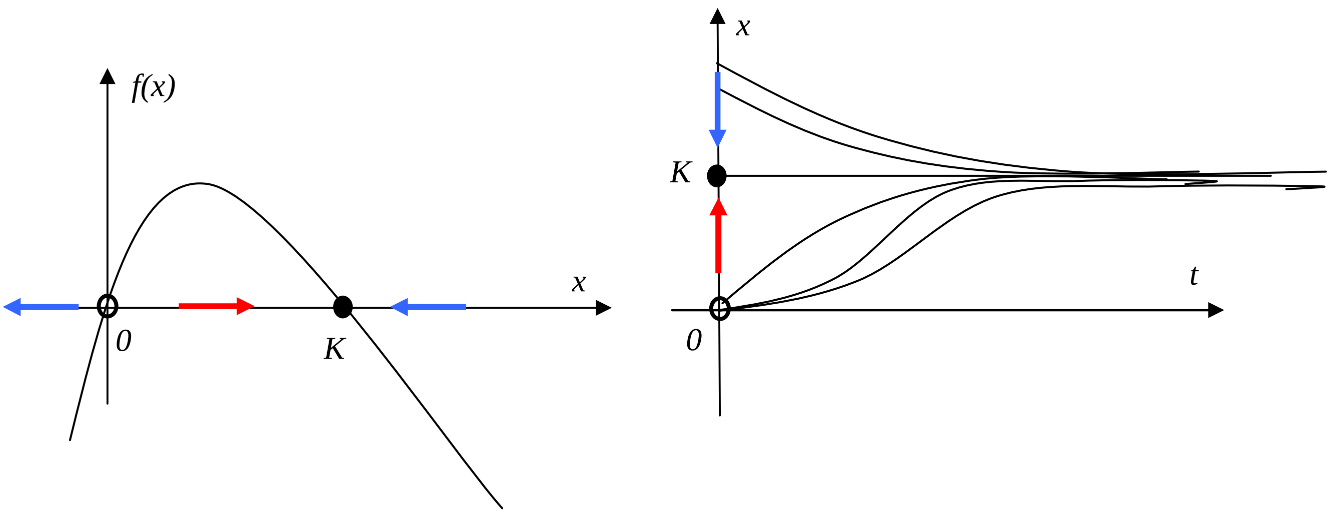
On peut vérifier en appliquant ce critère que l'unique équilibre du modèle $x'(t) = r.x(t)$ est stable lorsque $r < 0$ (extinction) et instable lorsque $r > 0$ (explosion).

De même, si l'on suppose $r > 0$, on peut vérifier que l'équilibre $x^* = K(\succ 0)$ du modèle $\dot{x}(t) = r.x(t).\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)$ est un équilibre stable alors que $x^* = 0$ est un équilibre instable. A noter que lorsque $f'(x^*) = 0$, on ne peut pas savoir à partir de f' si l'équilibre est stable, instable ou ni l'un ni l'autre.

2.1.2.d/ Esquisse des solutions

La condition $f\,'(x)^{*} < 0$ (resp. $f\,'(x)^{*} > 0$) est donc un critère de stabilité (resp. d'instabilité) qui se révèle très opérationnel puisqu'il se calcule facilement. Pour rendre ce critère intuitif, on se reportera à nouveau au schéma de la dynamique obtenu à partir du graphe de *f*. On y voit que lorsque $f\,'(x^{*}) < 0$ le graphe de *f* passe au point x^{*} de valeurs positives à des valeurs négatives et donc que la population croît tant qu'elle est plus petite que x^{*} (puisque $f\,'(x) > 0$) et décroit tant qu'elle est plus grande. Elle tend donc dans tous les cas à se rapprocher de l'équilibre. On fait le même raisonnement, inversé cette fois, dans le cas où $f\,'(x^{*}) > 0$.

La figure ci dessous montre que la détermination des équilibres et du seul sens de variation des autres solutions suffit bien souvent pour tracer l'esquisse des solutions de l'équation. C'est ce qu'on appelle l'étude qualitative.



« *x=0* est un équilibre instable ; *x=K* est un équilibre stable »

- *Graphe de la fonction* $f(x) = r.x.\left(1 - \dfrac{x}{K}\right)$ *représente le plan de phase* (x, x')

- *Graphe de la fonction* $\dot{x}(t) = r.x(t).\left(1 - \dfrac{x(t)}{K}\right)$ indique les *solutions de l'équation différentielle dans le plan* (t, x) *. Sur l'axe des x , les points représentent les équilibres et les flèches indiquent le sens de variation des solutions (croissantes si* $x' > 0$ *et décroissantes si* $x' < 0$ *).*

II.2 Stabilité et bilan énergétique

II.2.1 Energie mécanique d'un système

L'énergie mécanique d'un système peut exister sous deux formes différentes. Un corps possède de l'énergie cinétique du fait de son mouvement. Les positions des corps du système déterminent son énergie potentielle.

L'énergie mécanique E_m d'un système est la somme de son énergie cinétique Ec et de son énergie potentielle Ep :

$$E_m = E_c + E_p$$

et sachant aussi qu'un système conservatif est caractérisé par sa conservation d'énergie mécanique au cours du temps.

$$E_m = E_c + E_p = \text{constante} \; ; \frac{dE_m}{dt} = 0$$

II.2.2 Equilibre et stabilité d'un système conservatif

II.2.2.1 Positions d'équilibre

On considère un point matériel soumis à des forces conservatives dont la résultante est $\vec{F}$. La position d'équilibre du point matériel correspond à un extremum de l'énergie potentielle. Donc, si M_0 est une position d'équilibre, les dérivées premières de l'énergie potentielle doivent être nulles en ce point.

$$\frac{\partial E_p}{\partial x}\Big|_{M_0} = \frac{\partial E_p}{\partial y}\Big|_{M_0} = \frac{\partial E_p}{\partial z}\Big|_{M_0} = 0$$

II.2.2.2 Stabilité de l'équilibre

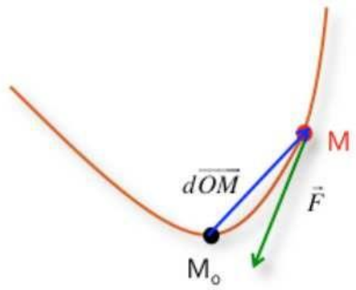
La position d'équilibre est dite stable si le point matériel y retourne spontanément suite à une perturbation l'éloignant de cette position. Dans le cas contraire l'équilibre est instable.

- **Equilibre stable – *Ep* minimale**

Soit un point matériel M ayant la position d'équilibre M_0. M_0 est une position d'équilibre stable si l'énergie potentielle est minimale en ce point. Dans le cas d'un mouvement à une dimension *(Ep(x))*, la dérivée seconde de l'énergie potentielle par rapport à la variable x est positive dans une position d'équilibre stable :

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}\Big|_{M_0} \succ 0$$

c.à.d que le point M_0 est un minimum de la fonction *Ep(x)*. Le travail élémentaire de la force quand le point matériel est éloigné de sa position d'équilibre est négatif.

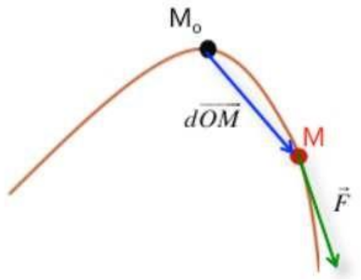


Equilibre instable – *Ep* maximale

M_0 est une position d'équilibre instable si l'énergie potentielle est maximale en ce point. Dans le cas d'un mouvement à une dimension *(Ep(x))*, la dérivée seconde de l'énergie potentielle par rapport à la variable *x* est négative dans une position d'équilibre instable :

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}\Big|_{M_0} \prec 0$$

c.à.d que le point M_0 est un maximum de la fonction *Ep(x)*. Le travail élémentaire de la force quand le point matériel est éloigné de sa position d'équilibre est positif.



II.3 Classification des points fixes

Afin de faciliter la notion de classe, on utilisera pour le moment des exemples de systèmes linéaires $\dot{X} = A.X$ de deuxième ordre (le point d'équilibre d'un système linéaire est unique).

Alors, on peut faire un classement en se référant à deux pivots :

- En fonction de la stabilité :
  - Attracteurs ou points stables
  - Répulseurs ou points instables
  - Points selles ou cols
- En fonction des oscillations :
  - Foyers
  - Centres et cycles limites
  - Nœuds

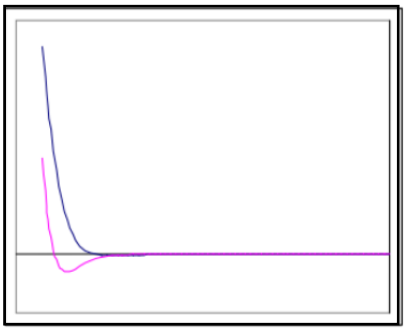
La résolution de l'équation $\dot{X} = 0$ va nous permettre de déduire le point d'équilibre du système $\dot{X} = A.X$. Notre but dans ce cas est d'identifier le type de classe de ce point d'équilibre. On détermine les valeurs propres de la matrice A ensuite on déduit le type de ce point.

II.3.1 Synthèse « Types de points d'équilibre »

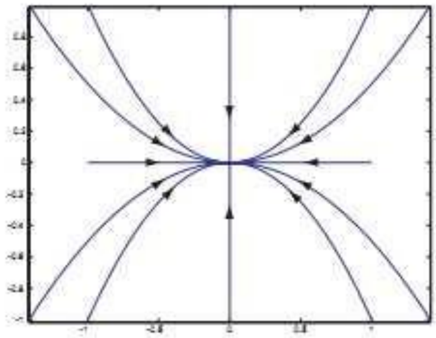
- Valeurs propres λ1 = λ2 = λ0 , (λ0 >0, on a une étoile ou un nœud dégénéré instable) ; (λ0 <0, on a une étoile ou un nœud dégénéré stable).
- Valeurs propres λ1 et λ2 sont de signe opposé, l'origine est un point selle ;
- Valeurs propres λ1, λ2 > 0 , l'origine est un nœud instable
- Valeurs propres λ1 ,λ2 < 0 , l'origine est un nœud stable.
- λ1,2 = α ± iβ
  - La partie réelle des valeurs propres est négative, l'origine est un foyer stable
  - La partie réelle des valeurs propres est positive, l'origine est un foyer instable
  - La partie réelle des valeurs propres est nulle, l'origine est un centre

II.3.2 Nœud stable

La structure générale d'un nœud stable est donnée par le schéma ci-dessous. On remarque qu'à partir de plusieurs états initiaux, la courbe converge vers le point d'équilibre (x_1^*, x_2^*). Alors, on dit que ce point est un nœud stable. Si toutes les trajectoires partant du point d'équilibre s'en éloignent, on dit qu'on a un nœud instable



Trajectoires (nœud stable)



Espace de phase (nœud stable)

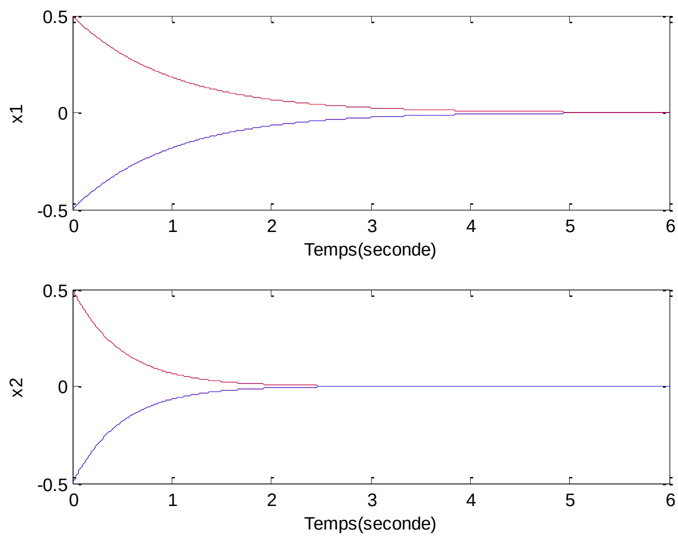
<u>Exemple :</u>

Soit le système :

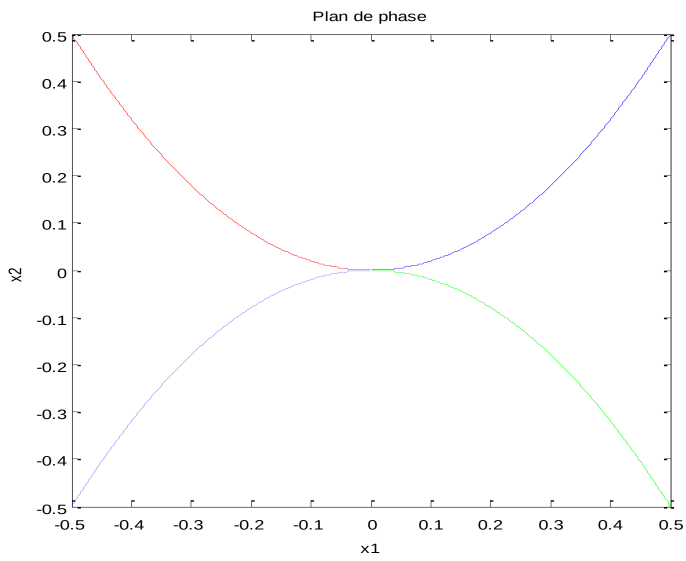
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \end{cases}$$

Le point d'équilibre de ce système correspond à une dynamique nulle : $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 0$, donc, $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$. Les valeurs propres sont réelles négatives ($\lambda_1 = -1; \lambda_2 = -2$)

On trace (les trajectoires et l'espace (portrait) de phase (x_1, x_2) en prenant quatre valeurs initiales $((x_1(0), x_2(0)) = (0.5, 0.5); (-0.5, -0.5); (-0.5, 0.5); (0.5, -0.5))$ et on remarque que la courbe pour chaque cas tend toujours vers le point d'équilibre $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ ce qui signifie que ce dernier point est stable.



Trajectoires $x_1(t); x_2(t)$

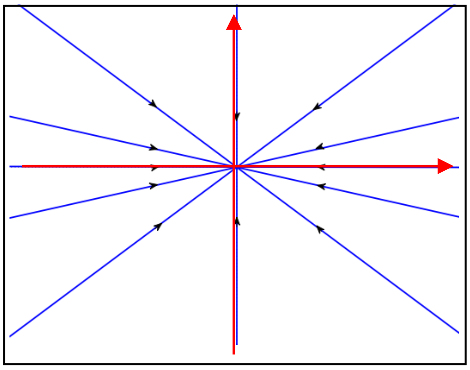


Espace de phase (x_1, x_2)

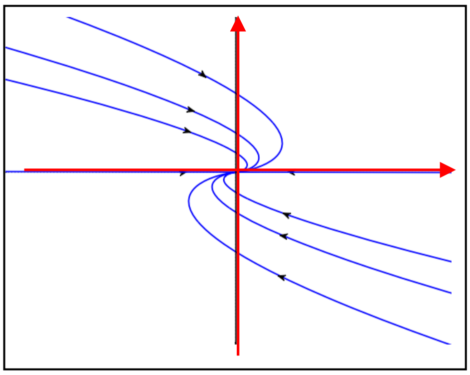
II.3.3 Nœud dégénéré stable et nœud étoile

Les valeurs propres $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ (λ0 <0, on a une étoile ou un nœud dégénéré stable).

- Nœud étoile : lorsque *A* est diagonale : $A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$
- Nœud dégénéré stable : lorsque la matrice *A* n'est pas diagonale : exemple $A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$



Nœud étoile



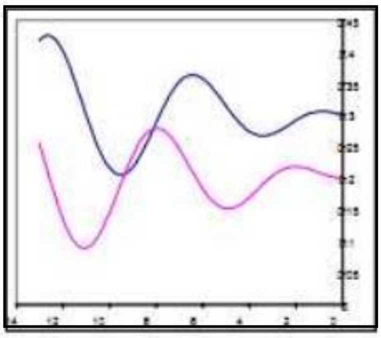
Nœud dégénéré stable

Exemple :

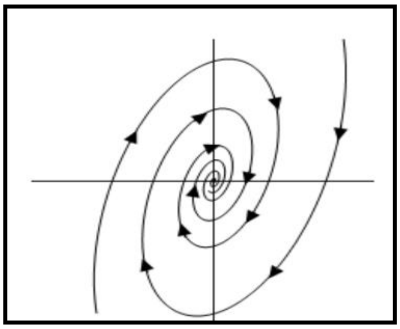
- Nœud étoile : $\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \end{cases}$. Alors, $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, ce qui donne $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$
- Nœud dégénéré stable : $\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \end{cases}$. Alors, $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, ce qui donne $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$

II.3.4 Foyer stable

Dans le portrait et les trajectoires ci-dessous, les solutions correspondent donc à des spirales, qui s'éloignent du point d'équilibre (l'origine est un foyer instable ou encore spirale répulsive.) ou se rapprochent du point d'équilibre (l'origine est un foyer stable ou encore spirale attractante).



Trajectoires (foyer stable)



Espace de phase (foyer stable)

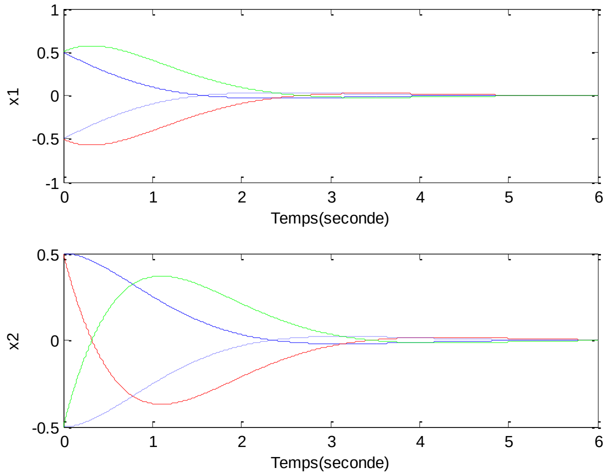
Exemple :

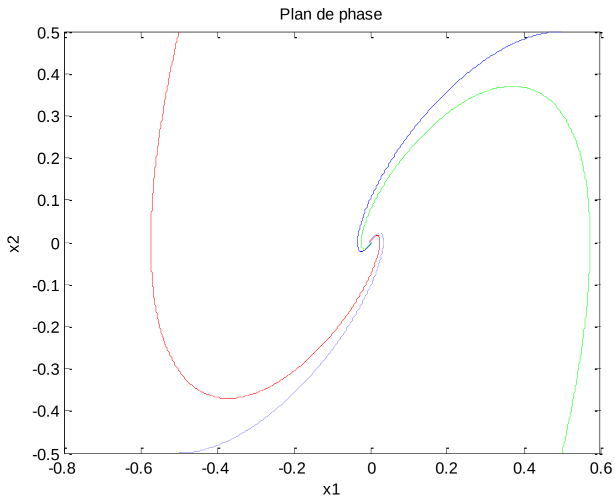
Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

On trouve le même point d'équilibre que l'exemple 1. Avec les mêmes conditions initiales, on obtient les résultats (portrait de phase et trajectoires) ci-dessous. Les valeurs propres sont imaginaires à parties réelles négatives ($\lambda_1 = -1 + j; \lambda_2 = -1 - j$).

Remarque : attention ! Ne pas confondre entre le foyer stable (x_1 et x_2 changent de signe lors de leurs variations) avec le nœud dégénéré stable (x_1 et x_2 ne changent pas de signe lors de leurs variations).

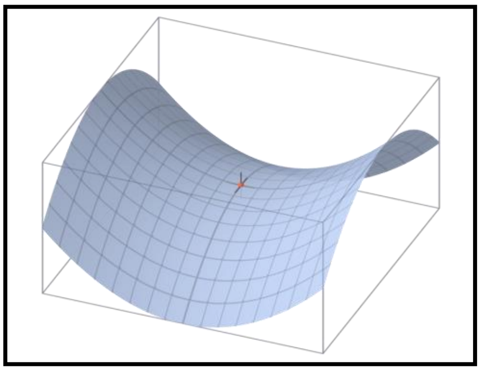


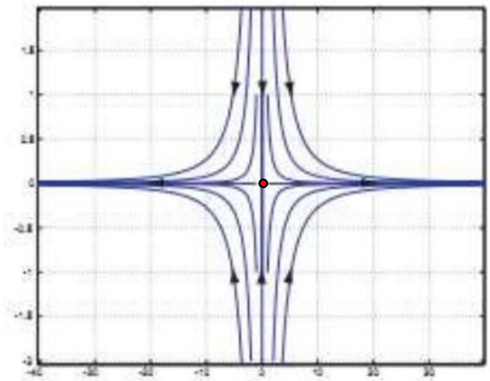


Trajectoires $x_1(t);x_2(t)$ **Espace de phase** (x_1,x_2)

II.3.5 Point selle (point col)

Pour un point selle, on distingue deux axes appelés les séparatrices du point selle, car ces droites séparent le plan en quatre « flots » de trajectoires différentes. Le point en rouge est le point du graphe de la fonction associé à son unique point-selle.

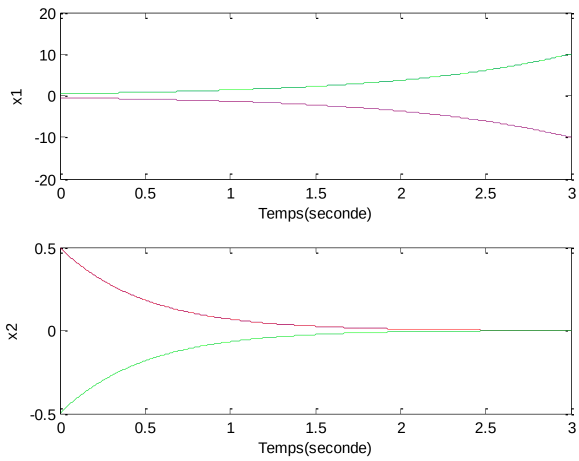


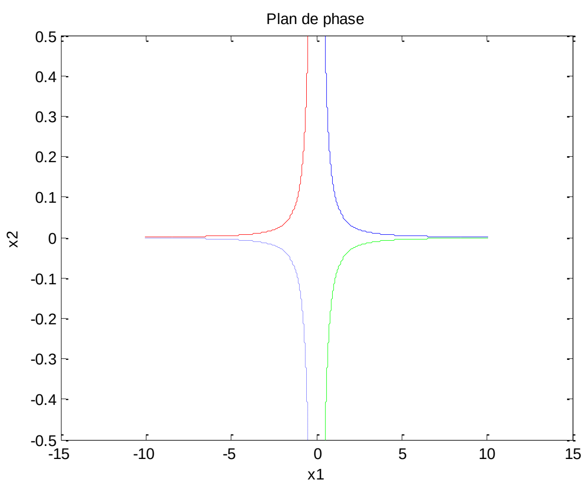


Trajectoires (Point selle) **Espace de phase (Point selle)**

<u>Exemple :</u>

Soit le système : $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \end{cases}$



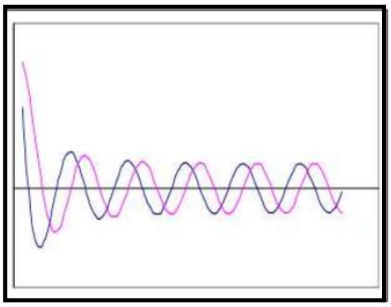


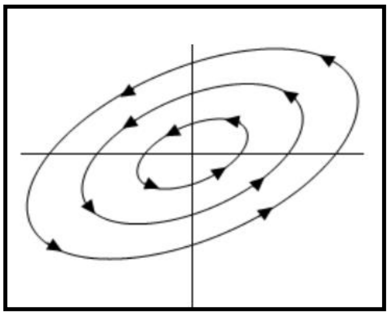
Trajectoires $x_1(t);x_2(t)$ **Espace de phase** (x_1,x_2)

Le point d'équilibre $\left(x_1^*, x_2^*\right) = \left(0, 0\right)$ est un point col. Les différentes courbes sont au voisinage du point d'équilibre et elles forment genre de selle de cheval (voir le graphe résultant). Les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ sont réelles de valeurs distinctes de signes opposés ($\lambda_1 = 1; \lambda_2 = -2$) .

II.3.6 Point centre

Dans ce cas, les trajectoires pour différentes valeurs initiales oscillent autour du point d'équilibre. De même pour l'espace de phase, on remarque des lieux de cercles autour de ce point. On dit que l'origine est un centre.





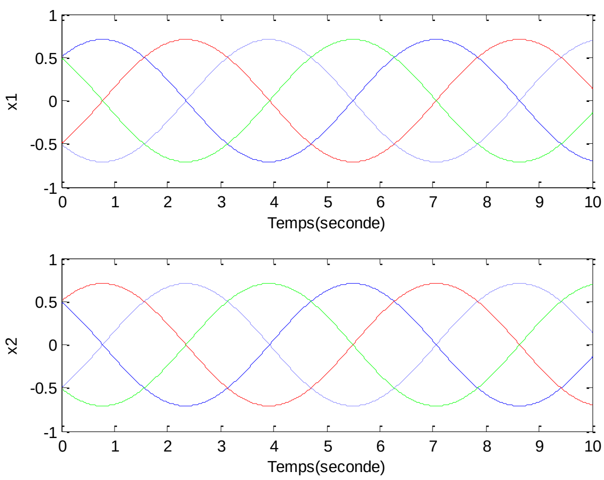
Trajectoires (Point selle) **Espace de phase (Point selle)**

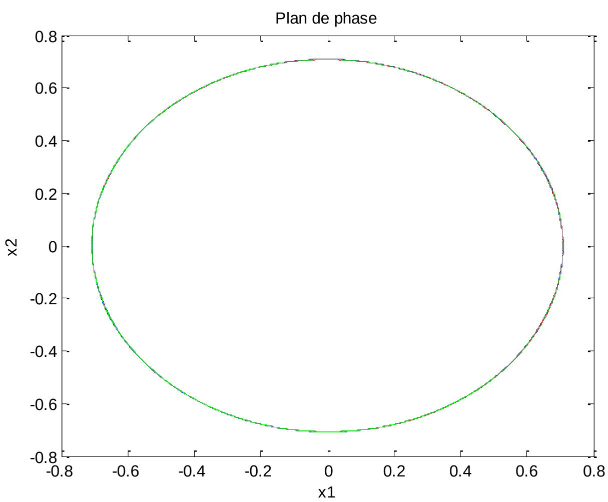
Exemple :

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$$

On utilise toujours les mêmes conditions initiales comme les exemples passés. Ces résultats sont obtenus seulement en faisant par exemple programmer cette dynamique de système avec le logiciel matlab. L'espace de phase représente alors des cercles superposés puisque le système est linéaire et les trajectoires donnent des oscillations sinusoïdales autour du point d'équilibre. Les valeurs propres sont purement imaginaires ($\lambda_1 = +j; \lambda_2 = -j$)





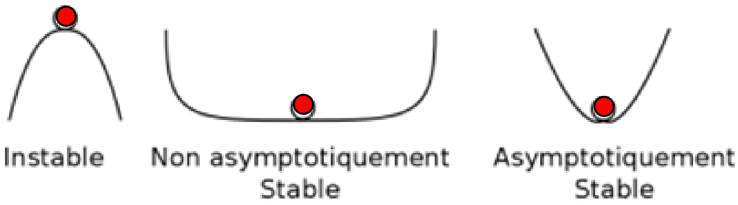
Trajectoires $x_1\left(t\right); x_2\left(t\right)$ **Espace de phase $\left(x_1, x_2\right)$**

II.4 Stabilité au sens de Lyapunov

II.4.1 Notions de stabilité au sens de Lyapunov

En mathématiques et en automatique, la notion de **stabilité de Lyapunov** (ou, plus correctement, de stabilité au sens de Lyapunov) apparaît dans l'étude des systèmes dynamiques. De manière générale, la notion de stabilité joue également un rôle en mécanique, dans les modèles économiques, les algorithmes numériques, la mécanique quantique, la physique nucléaire, etc.

D'une manière générale, l'état d'équilibre de la bille (voir figure) peut être représenté sous trois formes : instabilité ; stabilité asymptotique ; stabilité non asymptotique (stabilité marginale).



Deux définitions usuelles expliquent la différence entre la stabilité et la stabilité asymptotique :

Définition

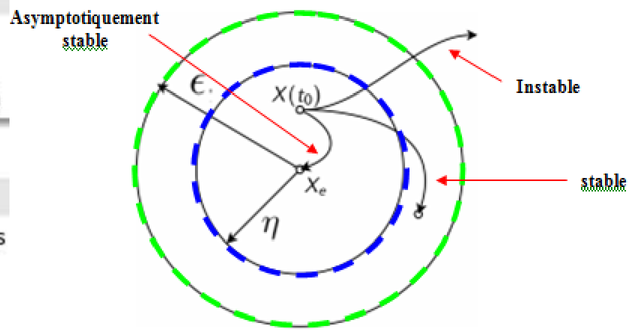
Un état d'équilibre X_e est stable au sens de Lyapunov si

$$\forall t_0, \quad \forall \epsilon > 0, \quad \exists \eta > 0 : |X(t_0) - X_e| < \eta \Rightarrow |X(t) - X_e| < \epsilon, \forall t \geq t_0$$

Définition

Un état d'équilibre X_e est asymptotiquement stable s'il est stable au sens de Lyapunov, et si

$$\exists \eta, \qquad |X(t_0) - X_e| < \eta \Rightarrow \lim_{t \to \infty} |X(t) - X_e| = 0$$



II.4.1.a/ Exemple introductif

Considérons le système dynamique défini par l'équation différentielle du premier ordre :

$$\dot{x} = -x - x^3$$

Pour déterminer les points d'équilibre *réels*, on résout l'équation $\dot{x} = 0$ d'où $\dot{x} = -x\left(1 + x^2\right) = 0$, ce qui équivaut à $x = 0$: c'est l'unique point d'équilibre. Le but est de déterminer si ce point d'équilibre est stable *sans avoir à résoudre l'équation différentielle*.

Soit alors la fonction candidate de Lyapunov $V(x) = x^2$; on peut l'assimiler à une énergie puisque cette fonction est strictement positive sauf au point d'équilibre $x = 0$ (on dit qu'elle est *définie positive*) et elle est « globalement asymptotiquement stable », c'est-à-dire que $V(x) \to +\infty$ lorsque $\|x\| \to +\infty$.

Calculons maintenant la dérivée de cette fonction le long des trajectoires du système. Elle s'écrit $\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x}$ avec $\dot{x} = -x - x^3$, soit donc $\dot{V}(x) = 2.x.\dot{x} = 2x\left(-x - x^3\right) = -2x^2 - 2x^4$. Par conséquent, $\dot{V}(x) \prec 0$ pour $x \neq 0$ (on dit alors que la fonction $-\dot{V}$ est définie positive, ou encore que $\dot{V}$ est définie négative).

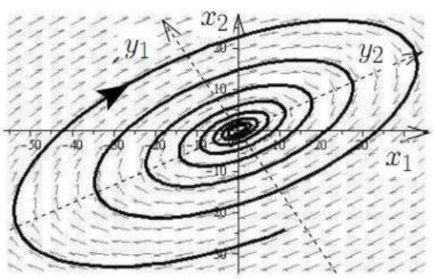
Cette énergie est donc toujours strictement décroissante. Le théorème de Lyapunov montre que cette énergie devra nécessairement s'annuler, c'est-à-dire que l'état *x* du système va nécessairement converger vers 0 quelle que soit la condition initiale. On dit que *V* est une **fonction de Lyapunov** et que le point d'équilibre 0 est **globalement asymptotiquement stable**.

II.4.1.b/ Equilibre asymptotiquement stable et Equilibre non asymptotiquement stable

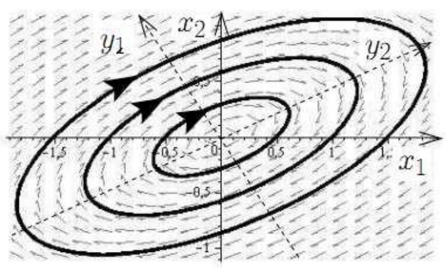
Dans ce qui suit, on va étudier l'état en fonction de sa dynamique : $f(t, x_1) = x_2 = \dot{x}_1$.

Pour un état x_1 (x_2 sa dynamique), on peut voir clairement dans le plan de phase la différence entre les notions de stabilité. Le point d'équilibre dans ce cas est $\left(x_1^*, x_2^*\right) = (0, 0)$

Soit la fonction de Lyapunov candidate $V(x) = x_1^2$, alors $\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 = 2.x_1x_2$.



1er Cas : Equilibre asymptotiquement stable



2ème Cas : Equilibre stable mais non asymptotiquement stable

- **1er cas :** Asymptotiquement stable s'il est stable et si de plus il existe une boule $B\left(x_1^*, r\right)$ telle que, pour tout *x* de $B\left(x_1^*, r\right)$ $x_1 \to x_1^*$ c.à.d $\lim_{t \to +\infty} \left\| f(t, x_1) - f\left(t, x_1^*\right) \right\| = 0$ (dynamique convergente vers zéro) x_1^* : état d'équilibre (dans ce cas, $x_1^* = 0$), alors $x_1 \to 0$ et $x_2 \to 0$ ce qui implique que $\dot{V}(x) \to 0$.

- **2ème cas :** la dynamique de l'état ne converge pas vers zéro, donc le système présente plusieurs points d'équilibre x_1^*. Alors il faut prévoir une stratégie de commande afin d'avoir $x_1 \to x_1^*$ c.à.d $\dot{V}(x) \prec 0$.

II.4.2 Définitions « Stabilité au sens de Lyapunov »

Définition 1 « stabilité»

L'état d'équilibre $x = x_e = 0$ est dit stable si

$$\forall t \geq 0 \ ; \ \forall \varepsilon \succ 0, \exists \alpha \succ 0 \quad \|x(0)\| \prec \alpha \quad \Rightarrow \quad \|x(t)\| \prec \varepsilon$$

Autrement dit, la stabilité au sens de Lyapunov de l'origine du système veut dire que pour tout $t \geq t_0$, la solution de condition initiale (t_0, x_0) reste au voisinage de l'origine si x_0 est au voisinage de l'origine. En d'autres termes, pour tout $t \geq t_0$, une petite perturbation de la condition initiale x_0 autour de l'origine donne naissance à une solution $x(t)$ qui reste proche de l'origine.

Notons bien que la stabilité du système n'implique pas la convergence des solutions vers l'origine, c'est pourquoi la notion de stabilité toute seule est insuffisante pour l'étude du comportement des solutions. On définit alors la notion d'attractivité.

Définition 2 « Attractivité»

On dit que l'origine $x = x_e = 0$ est

- un point d'équilibre est attractif, s'il existe un voisinage de l'origine U(0), tel que :

$$\forall x_0 \in U(0), \quad \lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$$

- un point d'équilibre est globalement attractif si :

$$\forall x_0 \in R^n, \quad \lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$$

Définition 3 « Stabilité asymptotique»

On dit que l'origine $x = x_e = 0$ est :

- un point d'équilibre asymptotiquement stable, s'il est stable et attractif.
- un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable, s'il est stable et globalement attractif.

Définition 4 « Stabilité exponentielle»

- On dit que l'origine $x = x_e = 0$ est un point d'équilibre exponentiellement stable, s'il existe un voisinage de l'origine noté U(0), $\exists\lambda_1 \succ 0$ et $\exists\lambda_2 \succ 0$, tels que

$$\|x(t)\| \leq \lambda_1 . \|x_0\| e^{-\lambda_2(t-t_0)},\ \forall x_0 \in U(0), \forall t \geq t_0 \geq 0$$

Dans ce cas, la constante λ_2 est appelée le taux ou aussi la vitesse de convergence.

L'origine $x = x_e = 0$ est un point d'équilibre globalement exponentiellement stable, si $U(0)=R^n$.

Il est important de remarquer que la propriété de la stabilité exponentielle du système entraine nécessairement la stabilité asymptotique de ce dernier.

Définition 5 « stabilité et instabilité pour l'équilibre x_e »

L'état d'équilibre x_e est dit stable si

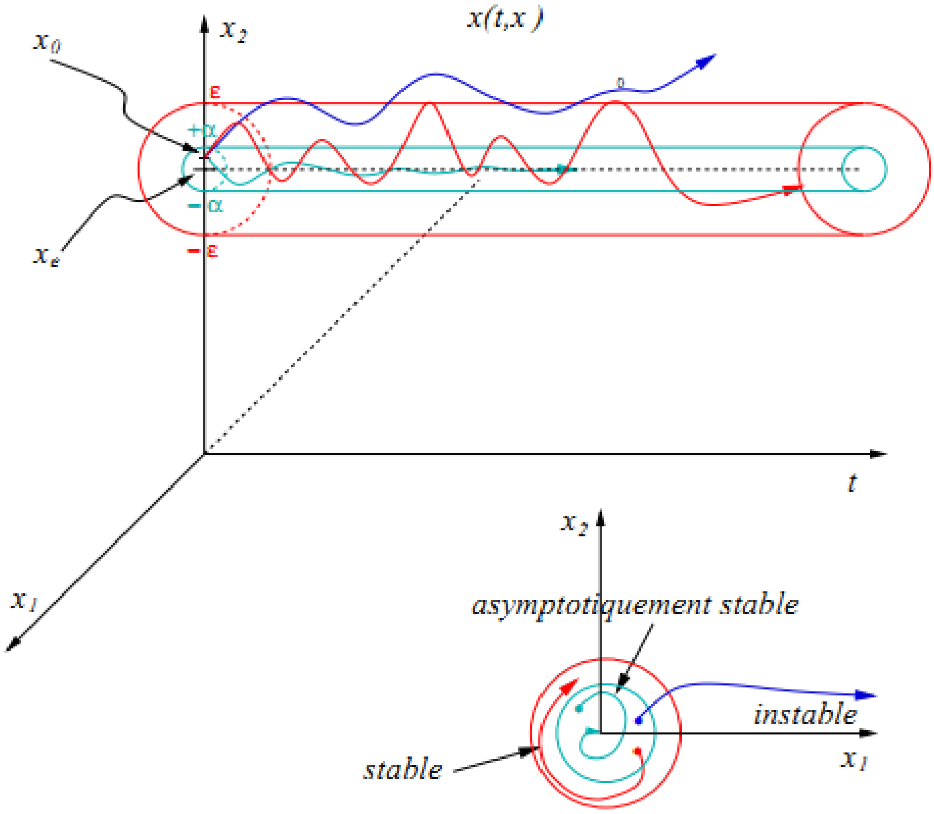
$$\forall t \geq 0, \forall \varepsilon \succ 0, \exists \alpha \succ 0 \quad \|x(0) - x_e\| \prec \alpha \quad \Rightarrow \quad \|x(t) - x_e\| \prec \varepsilon$$

Dans le cas contraire, x_e est dit instable.

Définition 6 « stabilité asymptotique pour l'équilibre x_e »

Un point d'équilibre x_e est asymptotiquement stable s'il est stable et si :

$$\exists \alpha \succ 0 \quad \|x(0) - x_e\| \prec \alpha \quad \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} x(t) = x_e$$



II.4.3 Méthode de Lyapunov »

Principe

Si l'énergie totale d'un système est dissipée de manière continue, alors le système devra rejoindre un point d'équilibre.

Méthode

Générer pour le système une fonction scalaire « de type » énergie et en examiner la dérivée temporelle.

Intérêt

Permet de conclure sur la stabilité d'un système sans résoudre explicitement les équations différentielles (non linéaires).

La stabilité au sens de **Lyapunov** est une traduction mathématique d'une constatation élémentaire : **si l'énergie totale d'un système dissipe continûment** (c'est à dire décroît avec le temps) **alors ce système qu'il soit** (linéaire ou non, stationnaire ou non) **tend à se ramener à un état d'équilibre** (il est stable). La méthode discrète cherche donc à générer une fonction scalaire de type énergétique qui admet une dérivée temporelle négative.

Avant d'énoncer le théorème de **Lyapunov** concernant la stabilité locale d'un point d'équilibre, nous allons tout d'abord donner quelques définitions (Remarque : on parle ici d'un vecteur d'état *X*).

II.4.3.1 Définitions

Fonction définie positive : Une fonction scalaire *V(x)* continûment différentiable (par rapport à *X*) est dite définie positive dans une région U autour de l'origine si : $V(0)=0$ et $V(X)>0, \forall X \in U \mid X \neq 0$

Fonction définie semi-positive si : $V(0)=0$ et $V(X)\geq 0, \forall X \in U \mid X \neq 0$.

Fonction quadratique définie positive. : La fonction quadratique est définie par $V(X)=X^TQX$, ou *Q* une matrice $n x n$ réelle symétrique, est dite définie positive si toutes les valeurs propres de la matrice sont strictement positives.

II.4.3.2 Principes de Lyapunov

Soit S un système dynamique de vecteur d'état *X*, possédant un point d'équilibre X_e. Soit B_{Xe}, une boule de R^n centrée en X_e.

S'il existe une fonction scalaire *V(X)* : ($B_{Xe} \rightarrow R$) continûment dérivable, possédant les propriétés suivantes

Stabilité locale

- $V(X_e) = 0$
- $V(X) \succ 0$ définie positive $\forall X \in B_{Xe}$, $X \neq X_e$
- $\dot{V}(X) \leq 0$ semi-définie négative $\forall X \in B_{Xe}$

Alors, *Xe* est un point d'équilibre localement stable dans B_{Xe} .

Stabilité locale et asymptotique

- $V(X_e) = 0$
- $V(X) \succ 0$ définie positive $\forall X \in B_{Xe}$, $X \neq X_e$
- $\dot{V}(X) \prec 0$ définie négative $\forall X \in B_{Xe}$

alors, l'équilibre est localement asymptotiquement stable

Stabilité globale asymptotique

L'état d'équilibre $X_e = 0$ est globalement asymptotiquement stable s'il existe une fonction continuellement dérivable *V(x)* telle que:

- $V(X_e) = 0$
- $V(X) \succ 0$ définie positive $\forall X \in B_{Xe}$, $X \neq X_e$
- $\dot{V}(X) \prec 0$ définie négative $\forall X \in B_{Xe}$
- $\dot{V}(X) \rightarrow -\infty$ quand $\|X\| \rightarrow \infty$

II.4.3.3 Méthodes d'analyse de stabilité des systèmes non linéaires

II.4.3.3.1Première méthode de Lyapunov (méthode indirecte)

La première méthode de Lyapunov se base sur l'analyse du comportement du système non linéaire autour de son point d'équilibre x_e (linéarisé ce système au voisinage de x_e). Cette stratégie s'appelle méthode de linéaisation. Donc, on étudie les valeurs propres λi du système de la matrice Jacobienne déduite au point d'équilibre x_e :

Avec un système de deuxième ordre : $\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1,x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1,x_2) \end{cases}$,

la matrice (matrice Jacobienne) évaluée au point d'équilibre aura l'expression : $J = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}\right|_{x_e}$

Les spécificités de cette méthode seront développées dans le troisième chapitre.

II.4.3.3.2 Deuxième méthode de Lyapunov (méthode directe)

La deuxième méthode de Lyapunov est basée sur l'aspect physique fondamental de l'énergie.

Si l'énergie totale d'un système, linéaire ou non-linéaire, est continûment dissipée (on parle de système dissipatif), alors le système doit converger obligatoirement vers un point d'équilibre.

Alors, la philosophie de Lyapunov, pour étudier la stabilité d'un système, est d'analyser la variation d'une seule fonction scalaire (appelée la fonction de Lyapunov) dépendant de l'énergie totale du système. C'est à dire, on va définir cette fonction de Lyapunov décroissante le long des trajectoires du système à l'intérieur du domaine d'attraction.

II.4.4 Exemples explicatifs

Exemple 1

Soit le système dont on veut connaître la stabilité : $\ddot{x} - \varepsilon x^2 \dot{x} + x = 0$.

Le passage en équations d'état : $x_1 = x$; $x_2 = \dot{x}$

Ainsi : $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \varepsilon x_1^2 x_2 - x_1 \end{cases}$

Ce système possède un point d'équilibre $(x_1, x_2) = (0,0)$

- Analysons la stabilité de ce système avec la fonction candidate de Lyapunov: $V(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$
- La dérivée de V(x) : $\dot{V}(x_1, x_2) = \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2 = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = x_1x_2 - x_1x_2 + \varepsilon x_1^2 x_2^2 = \varepsilon x_1^2 x_2^2$
- Donc : $\dot{V}(x_1, x_2) = \varepsilon x_1^2 x_2^2$

Ainsi, *V(x)* est une fonction définie positive qui est strictement décroissante le long de toutes les trajectoires possibles si ε<0.

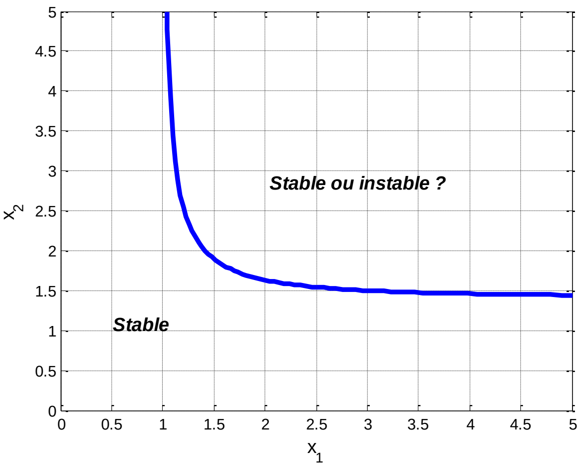
- En vertu de la théorie de Lyapunov, le système est globalement stable si *ε=0.*
- Il est globalement asymptotiquement stable si ε<0. ($V(x) \succ 0$ pour $x \neq 0$)
- Sinon, il est globalement instable.

Exemple 2

Soit : $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1\left(x_2^2 - 1\right) \\ \dot{x}_2 = -x_2\left(x_1^2 + 1\right) \end{cases}$

- Le point d'équilibre est $\left(x_1, x_2\right) = \left(0, 0\right)$. On vérifie la stabilité avec la fonction de Lyapunov: $V(x_1, x_2) = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{2}$

En dérivant: $$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 \\ &= 2x_1^2\left(x_2^2 - 1\right) - x_2^2\left(x_1^2 + 1\right) \\ &= x_1^2x_2^2 - 2x_1^2 - x_2^2 \end{aligned}$$



La condition de stabilité :
$$\dot{V}(x_1, x_2) < 0 \Rightarrow x_1^2x_2^2 - 2x_1^2 - x_2^2 < 0$$
Cette condition peut être réécrite comme suit:
$$\dot{V}(x_1, x_2) < 0 \Rightarrow x_2^2 < \frac{2x_1^2}{\left(x_1^2 - 1\right)}$$

- Essayons ce second candidat:

$$V_2(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + 2x_2^2}{2}$$
On trouve alors : $\dot{V}_2(x_1, x_2) = -2\left(x_1^2 + x_2^2\right) \prec 0$

Ce qui mène à conclure que le système est globalement asymptotiquement stable.

Conclusion : le choix de la fonction candidate de Lyapunov influe sur le type de stabilité du système.

Exemple 3

Soit la dynamique du système : $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{4}x_2\left(1 - e^{-t}\right) \end{cases}$

On remarque que le système n'est pas autonome.

- le point d'équilibre est à (0,0).
- Vérifions la stabilité avec cette fonction de Lyapunov suivante: $V(x_1, x_2, t) = x_1^2 + 2x_2^2(1 + e^{-t})$
- Sa dérivée donne : $$\begin{aligned} \dot{V}(x, t) &= 2x_1\dot{x}_1 + 4x_2\dot{x}_2(1 + e^{-t}) - 2x_2^2e^{-t} \\ &= -2x_1^2 - x_2^2(1 - e^{-t})(1 + e^{-t}) - 2x_2^2e^{-t} \\ &= -2x_1^2 - x_2^2(1 - e^{-2t} + 2e^{-t}) \end{aligned}$$

Ce système est globalement asymptotiquement stable car:
$$\dot{V}(x, t) = -2x_1^2 - x_2^2(1 - e^{-2t} + 2e^{-t}) \leq 0 \quad \forall t \succ 0 \quad \text{et} \quad \forall x_1, x_2 \in R$$
Sachant que $(1 - e^{-2t} + 2e^{-t}) \succ 0 \quad \text{pour t} \succ 0$

On peut dire que le choix de la fonction de Lyapunov a un effet sur l'évaluation de la zone de stabilité d'un système non-linéaire.

Exemple 4

Soit le système:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - e^{-2t} x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 \end{cases}$$

On cherche à trouver le type de stabilité de l'origine.

La fonction de Lyapunov candidate choisie est :
$V(x,t) = x_1^2 + \left(1 + e^{-2t}\right) x_2^2$

- $V(x,t)$ est définie positive par $V_0(x) = x_1^2 + x_2^2$
- $V(x,t)$ est décroissante par $V_1(x) = x_1^2 + 2x_2^2$

Calcul de la dérivée de $V(x,t)$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x,t) &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \\ &= -2e^{-2t} x_2^2 + 2x_1 \dot{x}_1 + 2\left(1 + e^{-2t}\right) x_2 \dot{x}_2 \\ &= -2\left(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 \left(1 + e^{-2t}\right)\right) \\ &\prec -2\left(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2\right) \\ &\prec -x_1^2 - \left(x_1 - x_2\right)^2 - x_2^2 \\ &\prec 0 \ \text{ pour } \ \left(x_1, x_2\right) \neq (0,0) \end{aligned}$$

L'origine est donc un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable.

Exemple5 « linéairisation »

Pour les systèmes suivants, trouver les points d'équilibre et étudier leur nature :

a/ $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{k}{m} x_1 - \dfrac{d}{m} x_2 \end{cases}$ pour $d, m, k > 0$ **b/** $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \varepsilon.\left(x_1^2 - 1\right) x_2 - x_1 \end{cases}$

---

a/ Le premier système est linéaire

Points d'équilibre :

Pour une dynamique nulle, on aura : $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 = 0 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{k}{m} x_1 - \dfrac{d}{m} x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$ d'où $\left(x_1^*, x_2^*\right) = (0,0)$ est le seul point d'équilibre (Remarque : un système linéaire possède toujours un seul point d'équilibre s'il existe).

Etude du point d'équilibre :

la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{d}{m} \end{pmatrix}$. Pour trouver les valeurs propres, il faut résoudre : $dét\left(A - \lambda I\right) = 0$

$$dét\left(A - \lambda I\right) = \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{d}{m} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{d}{m} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda\left(-\frac{d}{m} - \lambda\right) + \frac{k}{m} = \lambda^2 + \frac{d}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

$m\lambda^2 + d\lambda + k = 0$. Les valeurs propres sont $\lambda_{1,2} = \dfrac{-d \pm \sqrt{d^2 - 4km}}{2m}$. Par conséquent :

- Si $\sqrt{d^2-4km}>0$: les valeurs propres λ1 et λ2 sont réelles (de signe opposé si $\sqrt{d^2-4km}\succ d$, l'origine $(0,0)$ est un point selle ce qui signifie qu'on a une instabilité) ou (de même signe négatif si $\sqrt{d^2-4km}\prec d$ donc le point $(0,0)$ est un nœud stable ce qui signifie qu'on a une stabilité asymptotique).
- Si $\sqrt{d^2-4km}=0$: les valeurs propres $\lambda_1 = \lambda_2 = -d/(2m)$, (λ_1 et λ_2 sont réelles négatives, alors on a une étoile ou un nœud dégénéré stable). Cela signifie qu'on a une stabilité asymptotique.
- Si $\sqrt{d^2-4km}<0$: les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont imaginaires à partie réelle négative, l'origine est un foyer stable. (parties réelles de λ_1 et λ_2 négatives signifie qu'on a une stabilité asymptotique).

---

b/ Le deuxième système est non linéaire.

Points d'équilibre :

Pour une dynamique nulle, on aura : $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 = 0\\ \dot{x}_2 = \varepsilon.\left(x_1^2-1\right)x_2 - x_1 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_2 = 0\\ x_1 = 0\end{cases}$ d'où $\left(x_1^*, x_2^*\right)=(0,0)$ est l'unique point d'équilibre.

Etude du point d'équilibre :

la matrice $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & \varepsilon.\left(x_1^2-1\right)\end{pmatrix}$. Alors, la matrice Jacobéenne autour du point d'équilibre est : $J=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -\varepsilon\end{pmatrix}$ (on remplace $x_1=0; x_2=0$).

Pour trouver les valeurs propres, il faut résoudre : $dét\left(A-\lambda I\right)=0$

le système est linéarisé $\dot{X}=A_J.X$ est de la forme : $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2\\ \dot{x}_2 = -x_1-\varepsilon x_2\end{cases}$.

Les valeurs propres sont $\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left[-\varepsilon\pm\sqrt{\varepsilon^2-4}\right]$. La stabilité est asymptotique pour $0\prec\varepsilon\leq 2$ et on a instabilité pour $\varepsilon\prec 0$. Pour $\varepsilon=0$, on aura besoin d'utiliser la méthode directe de Lyapunov .

Explication détaillée :

- Si $0\prec\varepsilon\prec 2$: les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont imaginaires à partie réelle négative, l'origine est un foyer stable. Alors, on a une stabilité asymptotique.
- Si $-2\prec\varepsilon\prec 0$: les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont imaginaires à partie réelle positive, l'origine est un foyer instable. Donc, on a une instabilité.
- Si $\varepsilon\succ 2$: les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont réelles négatives, l'origine $(0,0)$ est un nœud stable. Alors, on a une stabilité asymptotique.
- Si $\varepsilon=+2$: les valeurs propres sont $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0 = -1$. On a une étoile ou un nœud dégénéré stable. Alors, la stabilité est asymptotique.
- Si $\varepsilon=-2$: les valeurs propres sont $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0 = +1$. On a une étoile ou un nœud dégénéré instable. Donc, on a une instabilité.
- Si $\varepsilon\prec -2$: les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont réelle positives, l'origine $(0,0)$ est un nœud instable. Alors, on a une instabilité.
- Si $\varepsilon=0$: les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont imaginaires à partie réelle nulles, l'origine est un centre. Donc, on aura besoin de la deuxième méthode de Lyapunov afin d'identifier la nature de la stabilité.