Université de Batna2
Faculté des Technologie
Département d'Electronique
Module : Systèmes Non Linéaires
Master 1 « **Automatique et Systèmes** »

Batna le 12 / 04 / 2020

TD N°1

Equilibre - Stabilité – Méthodes de Lyapunov

« Systèmes linéaires ; Systèmes non linéaires »

« Systèmes linéaires »

Un Système linéaire possède l'expression générale : $\dot{X} = A.X$.

λ_1, λ_2 : Les valeurs popres de A

- Valeurs propres $\lambda 1 = \lambda 2 = \lambda 0$, ($\lambda 0 > 0$, on a une étoile ou un nœud dégénéré instable ; ($\lambda 0 < 0$, on a une étoile ou un nœud dégénéré stable).
- Valeurs propres $\lambda 1$ et $\lambda 2$ sont de signe opposé, l'origine est un point selle ;
- Valeurs propres $\lambda 1, \lambda 2 > 0$, l'origine est un nœud instable
- Valeurs propres $\lambda 1 , \lambda 2 < 0$, l'origine est un nœud stable.
- $\lambda 1,2 = \alpha \pm i\beta$
    - La partie réelle des valeurs propres est négative, l'origine est un foyer stable
    - La partie réelle des valeurs propres est positive, l'origine est un foyer instable
    - La partie réelle des valeurs propres est nulle, l'origine est un centre

Exercice n°1 (corrigé)

Pour les systèmes linéaires suivants, trouver les points d'équilibre et étudier leur nature de stabilité:

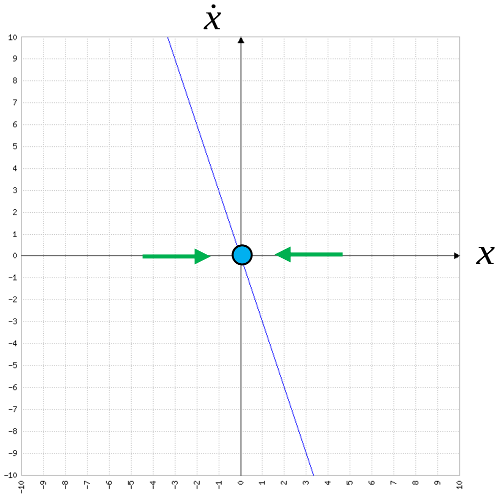
(a) $\dot{x} = \alpha.x$ (b) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = 2x_2 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 \end{cases}$

(a) $\dot{x} = \alpha.x$ est la représentation d'état, avec une seule variable *x*, d'un système linéaire minimal de premier ordre.

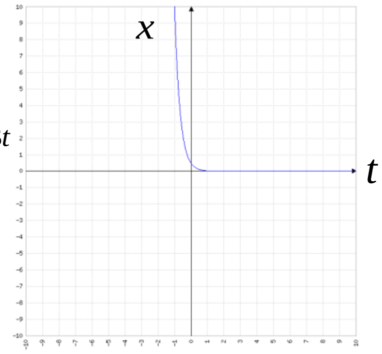
- Pour trouver son point d'équilibre, il faut résoudre l'équation $\dot{x} = 0$ (dynamique nulle). Ce qui donne l'unique point d'équilibre $x = 0$.
- L'étude de la nature de stabilité exige l'étude de la fonction $f(x) = \alpha.x$: on a $\frac{df(x)}{dx} = \alpha$: Si $\alpha \prec 0$ on aura une fonction $f(x)$ décroissante donc elle converge vers le point d'équilibre $x^* = 0$ soit du coté $x \prec 0$ ou du coté $x \succ 0$ (nœud étoile stable). Si $\alpha \succ 0$ on aura une fonction $f(x)$ croissante et passe par le point d'équilibre $x^* = 0$ sans stabilité pour $x \prec 0$ et s'éloigne de ce point pour $x \succ 0$ (nœud étoile instable).

Exemple 1 explicatif : soit $\dot{x} = -3x$. La solution est $x = A.e^{-3t}$ avec A une constante (on trace deux cas pour A positif et pour A négatif afin de comprendre cette convergence : $x = 0{,}5.e^{-3t}$ et $x = -0{,}5.e^{-3t}$

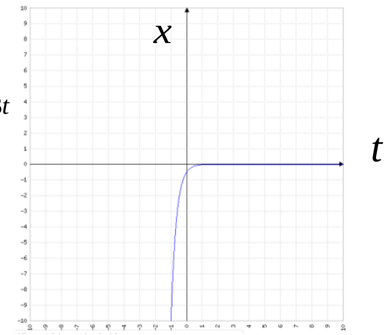
Pour $f(x) \succ 0$, la flèche est dans le sens croissant des x. Pour $f(x) \prec 0$, la flèche est dans le sens décroissant des x. Dans le plan de phase, les deux flèches vertes sont orientées vers le point d'équilibre, donc il est stable.



$x = 0{,}5.e^{-3t}$



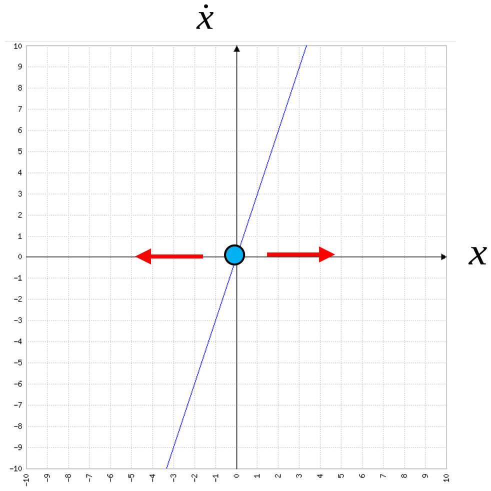
$x = -0{,}5.e^{-3t}$



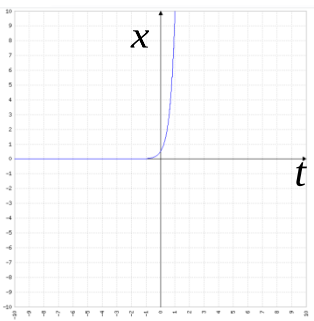
Plan de phase $\dot{x} = f(x)$

Trajectoire $x = g(t)$

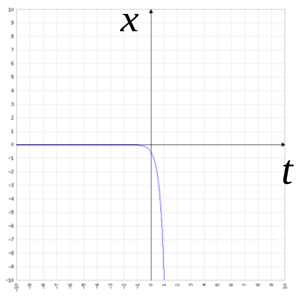
Exemple 2 explicatif : soit $\dot{x} = +3x$. La solution est $x = A.e^{+3t}$ avec A une constante (on trace deux cas pour comprendre la convergence : $x = 0{,}5.e^{+3t}$ et $x = -0{,}5.e^{+3t}$



$x = 0{,}5.e^{+3t}$



$x = -0{,}5.e^{+3t}$



Plan de phase $\dot{x} = f(x)$

Trajectoire $x = g(t)$

Dans le plan de phase, les deux flèches vertes sont orientées dans deux sens opposé par rapport au point d'équilibre, donc il est instable. La trajectoire montre bien la divergence en s'éloignant du point d'équilibre.

Remarque : Cette méthode du plan de phase sera développée en détail dans le troisième chapitre.

(b) Le système est de deuxième ordre. Le point d'équilibre correspond à $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = -x_2 = 0 \end{cases}$

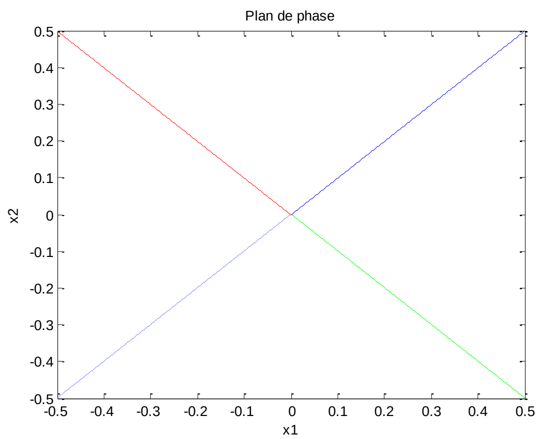
càd $(x_1^*, x_2^*) = (0,0)$

Dans ce cas, le plan de phase sera $x_2 = f(x_1)$ et les trajectoires seront $x_1 = g(t); x_2 = h(t)$. La matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est diagonale. Pour trouver les valeurs propres, il faut résoudre : $dét(A - \lambda I) = 0$

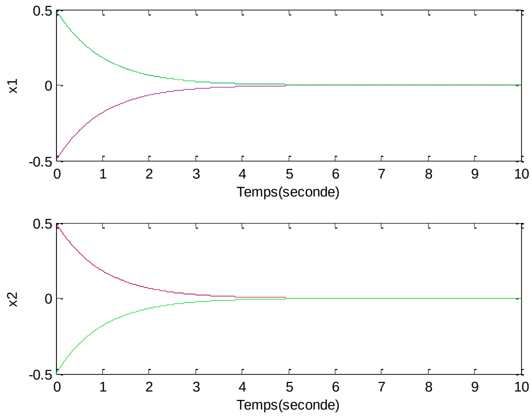
$$dét(A - \lambda I) = \left| \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)^2 = 0.$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Par conséquent le point d'équilibre $(0,0)$ est asymptotiquement stable puisque λ_1 et λ_2 sont réelles négatives (nœud étoile stable).

La représentation dans l'espace de phase (qui sera développée au 3ème chapitre) est la suivante (avec quatre valeurs initiales $(x_1^*, x_2^*) = (0.5, 0.5); (0.5, -0.5); (-0.5, 0.5); (-0.5, -0.5)$) :



Plan de phase $x_2 = f(x_1)$

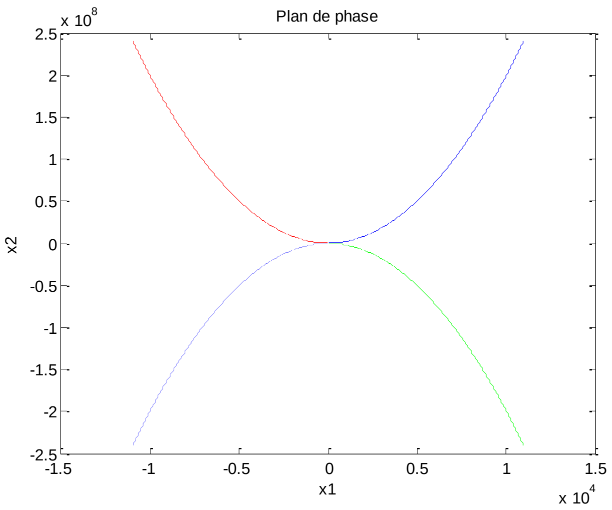


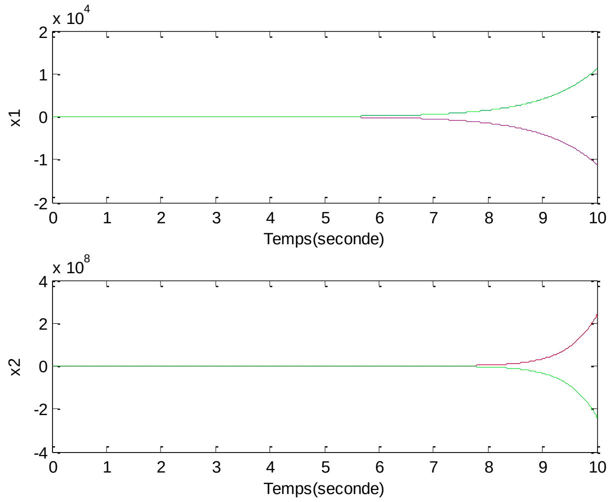
Trajectoire $x_1 = g(t); x_2 = h(t)$

(c) la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ est diagonale mais $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Pour trouver les valeurs propres, il faut que $dét\left(A-\lambda I\right)=0$. On trouve ainsi l'unique point d'équilibre $\left(x_1^*, x_2^*\right)=\left(0{,}0\right)$.

$$dét\left(A-\lambda I\right)=\left|\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0\\ 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=\left(1-\lambda\right)\left(2-\lambda\right)=0.$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1=1$ et $\lambda_2=2$. Par conséquent le point d'équilibre $\left(0{,}0\right)$ est instable puisque λ_1 et λ_2 sont réelles positives distinctes (nœud instable).



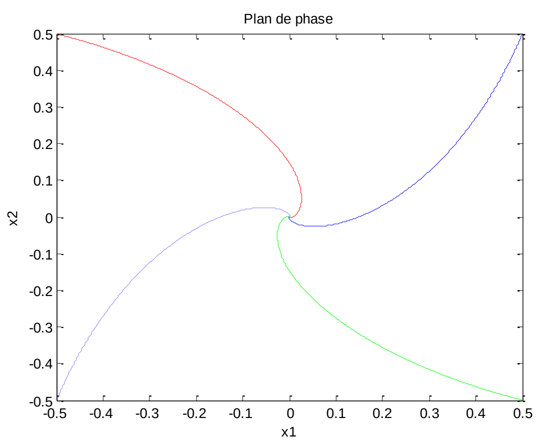


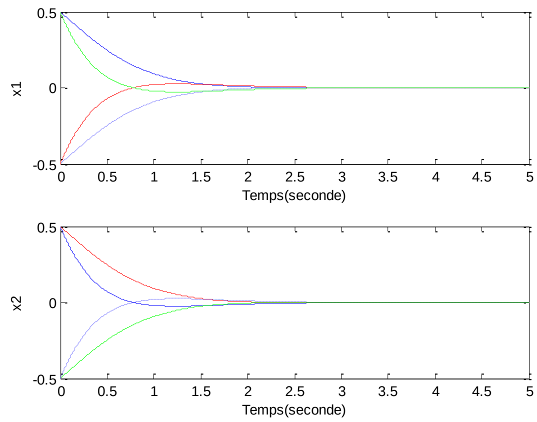
Plan de phase $x_2=f\left(x_1\right)$ **Trajectoire** $x_1=g\left(t\right); x_2=h\left(t\right)$

(d) la matrice $A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$. Pour trouver les valeurs propres, il faut que $dét\left(A-\lambda I\right)=0$

$$dét\left(A-\lambda I\right)=\left|\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1\\ -1 & -2-\lambda\end{vmatrix}=\left(-2-\lambda\right)\left(-2-\lambda\right)+1=\lambda^2+4\lambda+5=0$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1=-1+2i$ et $\lambda_2=-1-2i$. Par conséquent le point d'équilibre $\left(0{,}0\right)$ est asymptotiquement stable puisque λ_1 et λ_2 sont imaginaires à parties réelles négatives (foyer stable).





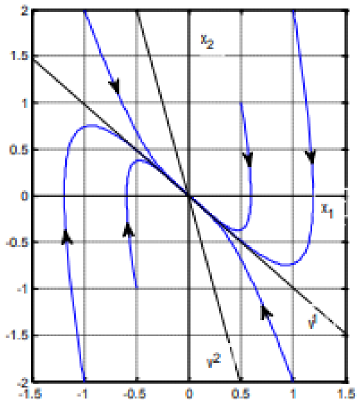
Plan de phase $x_2=f\left(x_1\right)$ **Trajectoire** $x_1=g\left(t\right); x_2=h\left(t\right)$

Exercice n°2 (corrigé)

Pour les systèmes linéaires suivants, trouver les points d'équilibre et déduire leur nature de stabilité sans démonstration :

(a) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -4x_1 - 5x_2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 2x_2 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2x_2 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 4x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 \end{cases}$

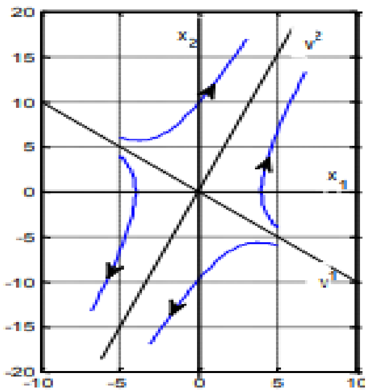
(a)Le point d'équilibre $(0,0)$ est un nœud instable (stabilité asymptotique).



$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -4x_1 - 5x_2 \end{cases}$; matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$

- Les valeurs propres sont : $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -4$

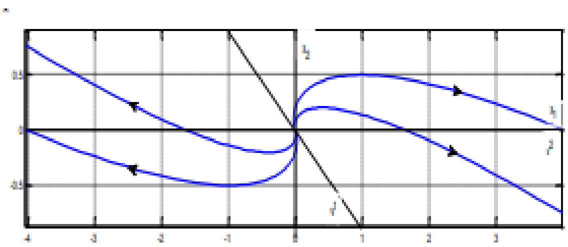
(b)Le point d'équilibre $(0,0)$ est un point selle (col) (instable).



$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 2x_2 \end{cases}$; matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

- Les valeurs propres sont : $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$

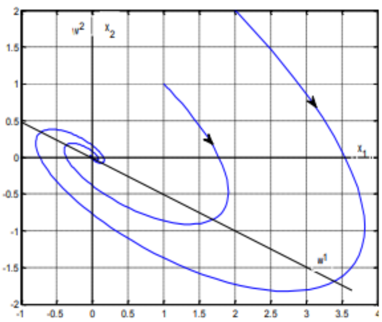
(c)Le point d'équilibre $(0,0)$ est un nœud dégénéré instable (instable).



$\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2x_2 \end{cases}$; matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

- Les valeurs propres sont : $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$

(d)Le point d'équilibre $(0,0)$ est un foyer stable (stabilité asymptotique).



$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 4x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 \end{cases}$; matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

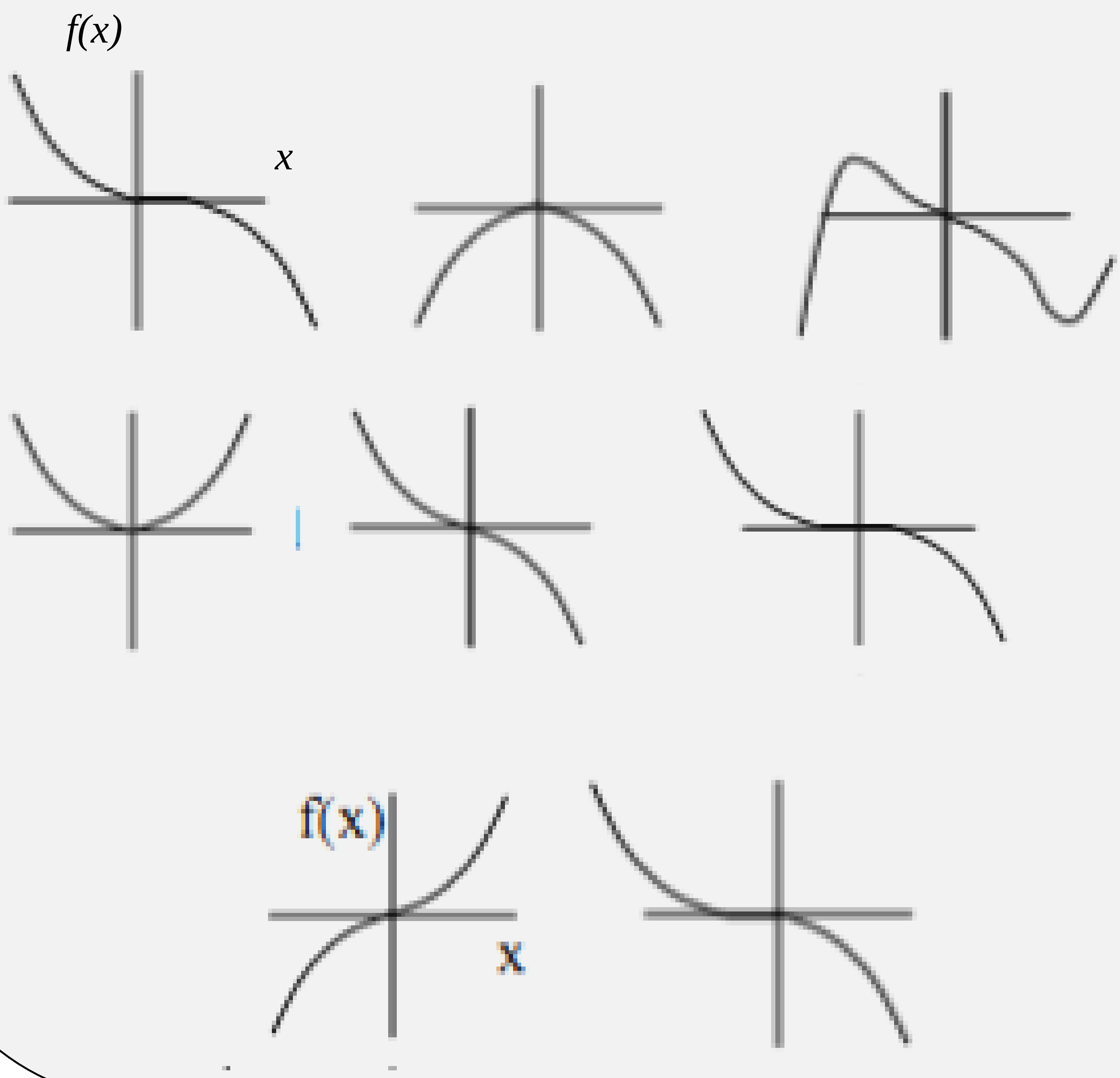
Les valeurs propres sont : $\lambda_1 = -1 + 2j; \lambda_2 = -1 - 2j$

Exercice n°3 (corrigé)

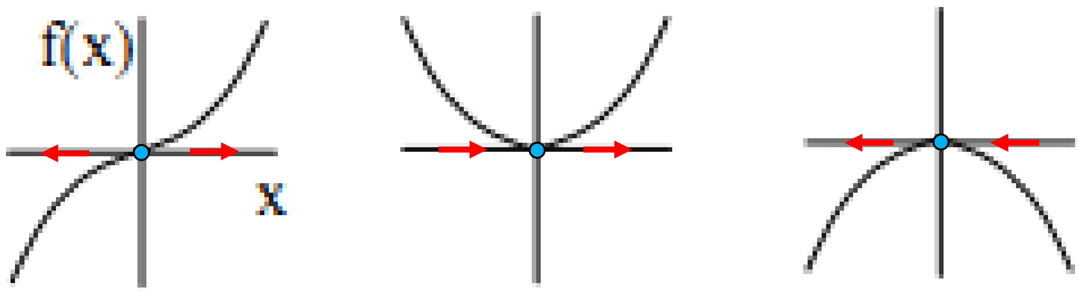
Soit le système linéaire $\dot{x} = f\left(x\right)$.

Pour n=1 (x scalaire) et $f\left(x\right) = 0$, le 0 est un point d'équilibre.

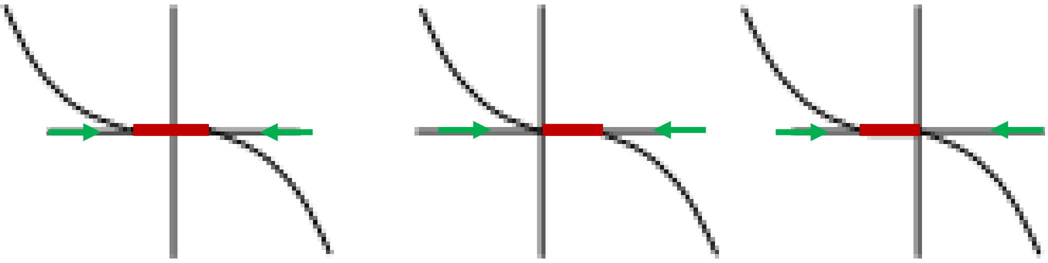
Pour chaque représentation (plan de phase), classifier si le point d'équilibre est stable, instable ou asymptotiquement stable.



a/ un point d'équilibre est instable si, pour $x \succ 0$ ou $x \prec 0$, la dérivée $\dot{x}$ est de même signe que x , càd si $\forall x \succ 0$ ou $\forall x \prec 0,\ x.f\left(x\right) \succ 0$. On peut aussi utiliser la représentation des flèches pour mieux comprendre.

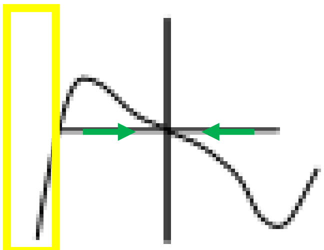


b/ un point d'équilibre est stable si et seulement s'il appartient à un voisinage où $x.f\left(x\right)\leq 0$. C'est-à-dire au entourage de x la stabilité est atteinte (la fonction $f\left(x\right)$ s'annule).

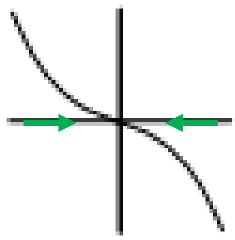


c/ un point d'équilibre est asymptotiquement stable si et seulement s'il appartient à un voisinage où pour $x\neq 0, x.f\left(x\right)\prec 0$. C'est-à-dire que la fonction $x.f\left(x\right)$ est négative et s'annule seulement pour $x=0$.

- Stabilité asymptotique **locale**: si elle est asymptotiquement stable dans un intervalle proche de $x=0$ On remarque dans le graphe ci-dessous qu'il existe un autre point d'équilibre mais instable ou $x.f\left(x\right)\succ 0$ (zone jaune).
- Stabilité asymptotique **globale**: si elle est asymptotiquement stable quelque soit la valeur de l'état x



Stabilité asymptotique locale



Stabilité asymptotique globale

Exercice n°4 (corrigé)

Pour chaque système linéaire, propose une fonction de Lyapunov quadratique pour identifier la nature de stabilité de l'origine. Vérifie s'il est globalement asymptotiquement stable.

(a) $\dot{x}=\alpha x$ (b) $\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1+x_2\\ \dot{x}_2=-x_1-x_2\end{cases}$ (c) $\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1+3x_2\\ \dot{x}_2=-2x_2\end{cases}$ (d) $\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1+x_2\\ \dot{x}_2=-x_2\\ \dot{x}_3=-3x_3\end{cases}$

Dans cet exercice, on va utiliser la deuxième méthode (directe) de Lyapunov.

Soit la fonction candidate de Lyapunov $V\left(x\right)$ (fonction d'énergie généralisée) $V\left(x\right)\succ 0 \quad \forall x\neq 0$.

Pour le système autonome $\dot{x}\left(t\right)=f\left(x\right)$ de point d'équilibre 0 :

- Si $V\left(x\right)\succ 0$ tel que $\dot{V}\left(x\right)\leq 0$ alors 0 est un point d'équilibre stable.
- Si $V\left(x\right)\succ 0$ tel que $\dot{V}\left(x\right)\prec 0$ pour $x\neq 0$ alors 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable.
- Si $V\left(x\right)\succ 0$ tel que $\dot{V}\left(x\right)\prec 0$ pour $x\neq 0$ et $\dot{V}(x)\rightarrow -\infty$ quand $\|x\|\rightarrow\infty$ alors 0 est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable.

Avec un modèle linéaire $\dot{x}(t) = A.x(t)$, la fonction quadratique de Lyapunov candidate est $V(x) = x^T Px$

$\dot{x} = A.x$ est asymptotiquement stable si et seulement si $\forall Q = Q^T \succ 0 \; \exists P \succ 0$ solution de l'équation de Lyapunov $A^T P + PA + Q = 0$.

---

a/ $\dot{x} = \alpha x$: ce système est de premier ordre avec un paramètre α. Le point d'équilibre est $x = 0$. Dans ce cas, la fonction candidate de Lyapunov sera $V(x) = x^T \beta x = \beta . x^2$ (puisque P est un scalaire dans ce cas, il sera remplacé par $\beta \succ 0$) :

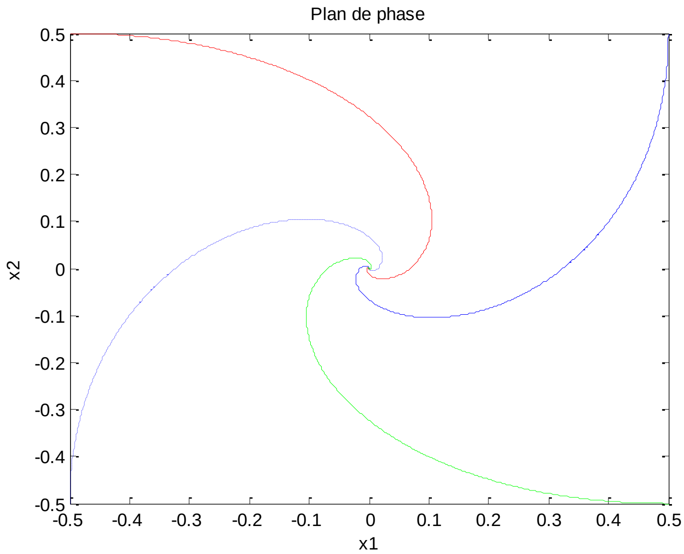
$V(x) = \beta x^2 \Rightarrow \dot{V}(x) = 2\beta x.\dot{x} = 2\beta\alpha x^2$

- Pour $\alpha \prec 0$, on aura $\dot{V}(x) \prec 0$. Alors, la stabilité de l'origine $x = 0$ est asymptotique. Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} V(x) = -\infty$, la stabilité est globalement asymptotique.
- Pour $\alpha \succ 0$, on aura $\dot{V}(x) \succ 0$. Alors, l'origine $x = 0$ est instable.
- Pour $\alpha = 0$, on aura $\dot{V}(x) = 0$. Alors, l'origine $x = 0$ est globalement stable.

---

b/ $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases}$: ce système est de deuxième ordre. Le point d'équilibre est $x = 0$.

La matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Ces valeurs propres sont $\lambda_1 = -1 + j, \lambda_2 = -1 - j$. Alors, on a un foyer stable.



La fonction candidate de Lyapunov sera $V(x) = x^T Px$ avec $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Stratégie de résolution :

On choisit la matrice symétrique positive $Q=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et on cherchera à trouver la matrice positive P.

On doit résoudre l'équation de Lyapunov $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}^T.\begin{pmatrix}p_1 & p_2\\ p_2 & p_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}p_1 & p_2\\ p_2 & p_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}p_1 & p_2\\ p_2 & p_3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-p_1-p_2 & -p_2-p_3\\ p_1-p_2 & p_2-p_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-p_1-p_2 & p_1-p_2\\ -p_2-p_3 & -p_2-p_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

C'est-à-dire : $\begin{pmatrix}-2p_1-2p_2 & p_1-2p_2-p_3\\ p_1-2p_2-p_3 & -2p_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-2p_1-2p_2=-1\\ p_1-2p_2-p_3=0\\ p_1-2p_2-p_3=0\\ -2p_3=-1\end{cases}$

Ce qui donne : $p_1=0.5;\ p_2=0;\ p_3=0.5$

Alors, $V(x)=x^TPx=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.5 & 0\\ 0 & 0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0.5x_1^2+0.5x_2^2$

$$\dot{V}(x)=\frac{\partial V}{\partial x_1}.\dot{x}_1+\frac{\partial V}{\partial x_2}.\dot{x}_2=x_1.\dot{x}_1+x_2.\dot{x}_2$$

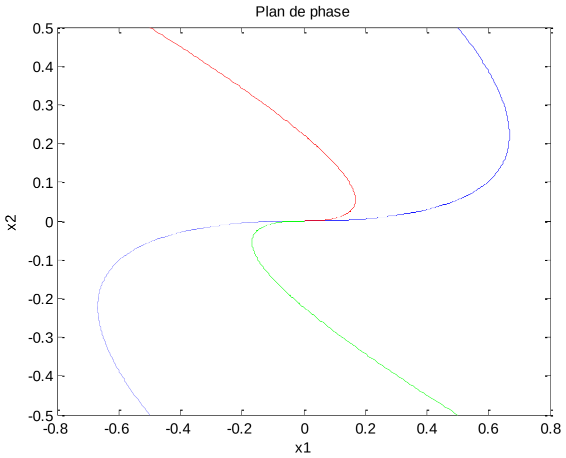
$$=x_1.(-x_1+x_2)+x_2(-x_1-x_2)=-x_1^2-x_2^2\prec 0$$

- On a trouvé la matrice P positive. Alors, le point d'équilibre est bien stable.
- On a trouvé une dérivée de Lyapunov totalement négative sauf au point de repos et $\lim\limits_{x_1,x_2\to\infty}\dot{V}(x)=-\infty$ ce qui signifie que le système est globalement asymptotiquement stable.

---

c/ $\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1+3x_2\\ \dot{x}_2=-2x_2\end{cases}$: ce système est de deuxième ordre. Le point d'équilibre est $x=0$.

la matrice $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 0 & -2\end{pmatrix}$. Ces valeurs propres sont $\lambda_1=-1,\lambda_2=-2$. Alors, on a un nœud stable.



La fonction candidate de Lyapunov sera $V(x)=x^T Px$ avec $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Stratégie de résolution :

On choisit la matrice symétrique positive $Q=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on cherchera à trouver la matrice positive P.

On doit résoudre l'équation de Lyapunov $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^T . \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -p_1 & -p_2 \\ 3p_1-2p_2 & 3p_2-2p_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -p_1 & 3p_1-2p_2 \\ -p_2 & 3p_2-2p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire : $\begin{pmatrix} -2p_1 & 3p_1-3p_2 \\ 3p_1-3p_2 & 6p_2-4p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2p_1=-1 \\ 3p_1-3p_2=0 \\ 3p_1-3p_2=0 \\ 6p_2-4p_3=-1 \end{cases}$

Ce qui donne : $p_1=0.5; p_2=0.5; p_3=1$

Alors, $V(x)=x^T Px=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=0.5x_1^2+1.5x_2^2+x_1x_2$

$$\dot{V}(x)=\frac{\partial V}{\partial x_1}.\dot{x}_1+\frac{\partial V}{\partial x_2}.\dot{x}_2=(x_1+x_2).\dot{x}_1+(3x_2+x_1).\dot{x}_2$$

$$=(x_1+x_2).(-x_1+3x_2)+(3x_2+x_1).(-2x_2)=-x_1^2-3x_2^2$$

- On a trouvé la matrice *P* positive. Alors, le point d'équilibre est bien stable.
- On a trouvé une dérivée de Lyapunov totalement négative sauf au point de repos et $\lim_{x_1,x_2\to\infty} \dot{V}(x)=-\infty$ ce qui signifie que le système est globalement asymptotiquement stable.

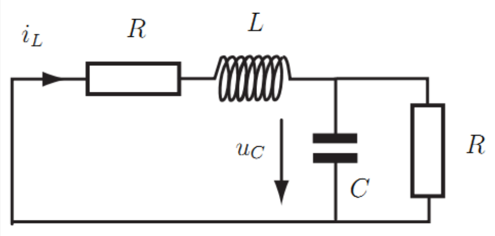
Exercice n°5 (supplémentaire)

Pour chaque système linéaire, propose une fonction de Lyapunov quadratique pour identifier la nature de stabilité de l'origine. Vérifie s'il est globalement asymptotiquement stable.

(a) $\begin{cases} \dot{x}_1=-x_1+\frac{3}{4}x_2 \\ \dot{x}_2=x_1-2x_2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \dot{x}_1=-\alpha x_1+x_2 \\ \dot{x}_2=-\beta x_2 \end{cases}$ avec $\alpha,\beta \succ 0$ (c) $\begin{cases} \dot{x}_1=-x_1+x_2 \\ \dot{x}_2=-x_2 \\ \dot{x}_3=-3x_3 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} \dot{x}_1=-x_1+x_2 \\ \dot{x}_2=-x_2 \\ \dot{x}_3=-3x_3 \end{cases}$

Exercice n°6 (corrigé)

Soit le système suivant (un circuit *RLC*) avec comme paramètres physiques R = 1 KΩ , C = 33 nF et L = 1 µH.



1/ Construire une représentation d'état en posant $x_1 = u_C$ et $x_2 = i_L$.

2/ Trouver une fonction de Lyapunov basée sur l'énergie physique.

3/ Poser :

$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$ et résoudre l'équation de Lyapunov $A^T.P + P.A = -Q$

La représentation d'état d'un système est-elle unique ? Non !!
Le modèle d'état obtenu dépend du choix des états. On peut associer à un même système, plusieurs vecteurs d'état conduisant ainsi à différentes représentations d'états équivalentes

Linéarisation et Critère de Lyapunov

Critère de Lyapunov (1892) — Supposons la matrice A constante. Soit Q une matrice symétrique réelle semi-définie positive $(Q \geq 0)$. S'il existe une matrice $P \succ 0$ vérifiant l'équation dite de Lyapunov : $A^T.P + P.A = -Q$, alors le point d'équilibre 0 est stable.

Réciproquement, il existe une matrice symétrique P solution de ($A^T.P + P.A = -Q$) pour toute matrice symétrique Q si, et seulement si A n'a pas de valeurs propres λ_i, λ_j telles que $\lambda_i + \lambda_j = 0$; cette solution est alors unique.

Si $Q \geq 0$ et toutes les valeurs propres de A sont à partie réelle négative, alors $P \geq 0$.

1/

L'équation de la première maille (somme des tensions nulle) donne :

$$Ri_L + L\frac{di_L}{dt} + u_c = 0$$

et l'équation du nœud (somme des courants nulle) :

$$i_L - C\frac{du_c}{dt} - \frac{1}{R}u_c = 0$$

En choisissant les variables d'état :

$$x_1 = u_c \quad et \quad x_2 = i_L$$

On aura le système suivant :

$$\begin{cases} Rx_2 + L\dfrac{dx_2}{dt} + x_1 = 0 \\ x_2 - C\dfrac{dx_1}{dt} - \dfrac{1}{R}x_1 = 0 \end{cases}$$

En isolant les dérivées (dynamiques des états), cela conduit à la représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{1}{RC}x_1 + \dfrac{1}{C}x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{1}{L}x_1 - \dfrac{R}{L}x_2 \end{cases}$$

ou, en écriture matricielle, avec $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^T$:

$$\dot{x} = Ax \text{ avec } A = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{RC} & \dfrac{1}{C} \\ -\dfrac{1}{L} & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix}$$

2/

L'énergie physique se décompose en deux termes, l'énergie magnétique stockée dans la bobine $\frac{1}{2}Li_L^2$ et l'énergie électrique statique stockée sous la forme de charges dans la capacité $\frac{1}{2}Cu_C^2$.

Ainsi, $V = \frac{1}{2}Cx_1^2 + \frac{1}{2}Lx_2^2$ devient notre fonction candidate de Lyapunov.

Pour vérifier que ce candidat est bien une fonction de Lyapunov, calculons sa dérivée :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= Cx_1\dot{x}_1 + Lx_2\dot{x}_2 \\ &= Cx_1\left(-\frac{1}{RC}x_1 + \frac{1}{C}x_2\right) + Lx_2\left(-\frac{1}{L}x_1 + \frac{R}{L}x_2\right) \\ &= -\frac{1}{R}x_1^2 + x_1x_2 - x_1x_2 - Rx_2^2 \\ &= -\frac{1}{R}x_1^2 - Rx_2^2 < 0 \end{aligned}$$

3/

<u>1ère stratégie de résolution :</u>

On peut également tout calculer matriciellement : On pose $V = \frac{1}{2}x^T Px$ avec : $P = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}$

P est une matrice définie positive car c'est une matrice diagonale avec tous les éléments dans la diagonale qui sont positifs. L'équation de Lyapunov sera donnée par :

$$\begin{aligned} A^T P + PA &= \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{RC} & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & -\dfrac{R}{L} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{RC} & \dfrac{1}{C} \\ -\dfrac{1}{L} & -\dfrac{R}{L} \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} \dfrac{2}{R} & 0 \\ 0 & 2R \end{pmatrix} = -Q \end{aligned}$$

On constate, que Q est bien une matrice définie positive car elle est diagonale avec des éléments positifs, et que l'on confirme bien que :

$$\dot{V} = -\frac{1}{2}x^T Qx = -\frac{1}{R}x_1^2 - Rx_2^2 < 0$$

Ce qui signifie que V est une fonction de Lyapunov.

2ème stratégie de résolution :

On choisit une matrice diagonale positive $Q=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ et on cherche à définir la matrice $P=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{bmatrix}$ par la résolution de l'équation de Lyapunov. On prend $p_{12}=p_{21}=p_0$ pour avoir une matrice diagonale.

$$A^T P+PA=\begin{bmatrix}-\frac{1}{RC} & -\frac{1}{L}\\ \frac{1}{C} & -\frac{R}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{RC} & \frac{1}{C}\\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$A^T P+PA=\begin{bmatrix}-\frac{1}{RC} & -\frac{1}{L}\\ \frac{1}{C} & -\frac{R}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{RC} & \frac{1}{C}\\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{1}{RC}p_{11}-\frac{1}{L}p_{21} & -\frac{1}{RC}p_{12}-\frac{1}{L}p_{22}\\ \frac{1}{C}p_{11}-\frac{R}{L}p_{21} & \frac{1}{C}p_{12}-\frac{R}{L}p_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{1}{RC}p_{11}-\frac{1}{L}p_{12} & \frac{1}{C}p_{11}-\frac{R}{L}p_{12}\\ -\frac{1}{RC}p_{12}-\frac{1}{L}p_{22} & \frac{1}{C}p_{21}-\frac{R}{L}p_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-2\frac{1}{RC}p_{11}-2\frac{1}{L}p_0 & \frac{1}{C}p_{11}-\left(\frac{1}{RC}+\frac{R}{L}\right)p_0-\frac{1}{L}p_{22}\\ \frac{1}{C}p_{11}-\left(\frac{1}{RC}+\frac{R}{L}\right)p_0-\frac{1}{L}p_{22} & 2\frac{1}{C}p_0-2\frac{R}{L}p_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}\frac{1}{C}p_{11}-\left(\frac{1}{RC}+\frac{R}{L}\right)p_0-\frac{1}{L}p_{22}=0\\ -2\frac{1}{RC}p_{11}-2\frac{1}{L}p_0=-1\\ 2\frac{1}{C}p_0-2\frac{R}{L}p_{22}=-1\end{cases}$$

On trouve : $p_{12}=p_{21}=p_0=0, p_{11}=\frac{RC}{2}, p_{22}=\frac{L}{2R}$

Donc, la matrice $P=\begin{bmatrix}\frac{RC}{2} & 0\\ 0 & \frac{L}{2R}\end{bmatrix}$ est diagonale positive et ce qui certifie l'équation de Lyapunov.

« Systèmes non linéaires »

Exercice n°7 (corrigé)

Pour les systèmes non linéaires suivants, trouver les points d'équilibre et discuter la stabilité ou l'instabilité de ces points :

(a) $\dot{x} = 0.1x^3 - 0.4x^2 - 1.1x + 3$ (b) $\dot{x} = sin(x)$ (c) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 - 3x_2 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -sin(x_1) \end{cases}$

Un système non linéaire peut avoir plusieurs points d'équilibre par contre le système linéaire possède un seul point d'équilibre.

(a)

Point d'équilibre :

Dynamique nulle implique que $\dot{x} = 0.1x^3 - 0.4x^2 - 1.1x + 3 = 0$

On trouve trois points d'équilibre : $x^* = 2, \ -3, \ 5$

Nature de stabilité des points d'équilibre :

1ère stratégie de résolution (méthode analytique)

Pour répondre à cette question, il faut tout d'abord linéariser le système autour de ces points d'équilibre (utiliser la 1ère méthode indirecte de Lyapunov).

- *Autour du point* $x^* = 2$

$f(x) = \dot{x} = 0.1x^3 - 0.4x^2 - 1.1x + 3$

$$\frac{f(x)}{dx}\Big|_{x=2} = 0.3x^2 - 0.8x - 1.1\Big|_{x=2} = -1.5$$

$$\Rightarrow x.\frac{f(x)}{dx}\Big|_{x=2} \prec 0$$

Le point d'équilibre est donc stable.

Au voisinage du point $x^* = 2$, le modèle linéarisé autour de ce point est $\dot{x} = a.x + b = -1.5x + b$

Pour $\dot{x} = 0, x = 2 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow \dot{x} = -1.5x + 3$

- *Autour du point* $x^* = -3$

$$\frac{f(x)}{dx}\Big|_{x=-3} = 0.3x^2 - 0.8x - 1.1\Big|_{x=-3} = -5.9$$

$$\Rightarrow x.\frac{f(x)}{dx}\Big|_{x=-3} \succ 0$$

Le point d'équilibre est donc instable.

Au voisinage du point $x^* = -3$, le modèle linéarisé autour de ce point est $\dot{x} = a.x + b = 5.9x + b$

Pour $\dot{x} = 0, x = -3 \Rightarrow b = +17.7 \Rightarrow \dot{x} = 5.9x + 17.7$

- *Autour du point* $x^* = 5$

$$\frac{f(x)}{dx}\Big|_{x=5} = 0.3x^2 - 0.8x - 1.1\Big|_{x=5} = 2.4$$

$$\Rightarrow x.\frac{f(x)}{dx}\Big|_{x=5} \succ 0$$

Le point d'équilibre est donc instable.

Au voisinage du point $x^* = 5$, le modèle linéarisé autour de ce point est $\dot{x} = a.x + b = 2.4x + b$

Pour $\dot{x} = 0, x = -3 \Rightarrow b = -12 \Rightarrow \dot{x} = 2.4x - 12$

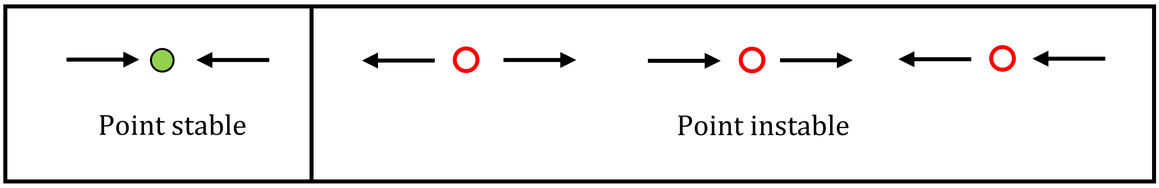
2ème stratégie de résolution (méthode graphique)

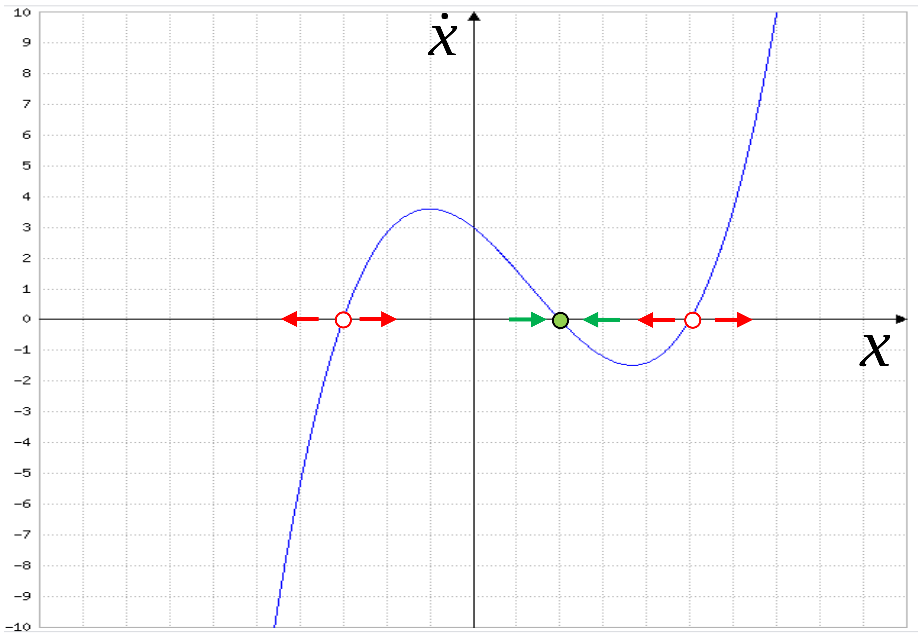
$$f(x) = \dot{x} = 0.1x^3 - 0.4x^2 - 1.1x + 3$$

$$\frac{f(x)}{dx} = 0.3x^2 - 0.8x - 1.1 = 0 \Rightarrow x = 3.66; x = -1$$

valeurs min et max : $f(3.66) = -1.49;\ f(-1) = 3.6$

- On trace la courbe : $\dot{x} = f(x)$
- On trace des flèches dans de sens croissant des x, si la fonction dérivée $\dot{x} = f(x) \succ 0$ (positive).
- On trace des flèches dans de sens décroissant des x, si la fonction dérivée $\dot{x} = f(x) \prec 0$ (négative).
- On déduit la nature de stabilité du point selon le résultat des flèches :





(b)

Point d'équilibre :

Dynamique nulle implique que $\dot{x} = sin(x) = 0$

On trouve une infinité de points d'équilibre : $x^* = k\pi; k \in Z$

Nature de stabilité des points d'équilibre :

1ère stratégie de résolution (méthode analytique)

Pour répondre à cette question, il faut tout d'abord linéariser le système autour de ces points d'équilibre (utiliser la 1ère méthode indirecte de Lyapunov).

On a deux zone : $x^* = 2k\pi; k \in Z$ (*k nombre entier positif*) et $x^* = (2k+1)\pi; k \in Z$

- *Autour des points* $x^{*} = 2k\pi; k \in Z$

$f(x) = \dot{x} = sin(x)$

$$\frac{f(x)}{dx}\Big|_{x=2k\pi} = cos(x)\Big|_{x=2k\pi} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{dx}\Big|_{x=2k\pi} \succ 0$$

Le point d'équilibre est donc <u>instable</u> pour $x^{*} = ...-4\pi, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi..., 2k\pi; k \in Z$.

Au voisinage des points $x^{*} = 2k\pi; k \in Z$, les modèles linéarisés autour de ces points sont au nombre infini et on cite quelques exemples:

- Pour $x^{*} = 0$, $\begin{cases} \dot{x} = x + b \\ \dot{x} = 0, x = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow \dot{x} = x \end{cases}$
- Pour $x^{*} = 2\pi$, $\begin{cases} \dot{x} = x + b \\ \dot{x} = 0, x = 2\pi \Rightarrow b = -2\pi \Rightarrow \dot{x} = x - 2\pi \end{cases}$
- Pour $x^{*} = -2\pi$, $\begin{cases} \dot{x} = x + b \\ \dot{x} = 0, x = -2\pi \Rightarrow b = +2\pi \Rightarrow \dot{x} = x + 2\pi \end{cases}$

- *Autour des points* $x^{*} = (2k+1)\pi; k \in Z$

$f(x) = \dot{x} = sin(x)$

$$\frac{f(x)}{dx}\Big|_{x=(2k+1)\pi} = cos(x)\Big|_{x=(2k+1)\pi} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{dx}\Big|_{x=(2k+1)\pi} \prec 0$$

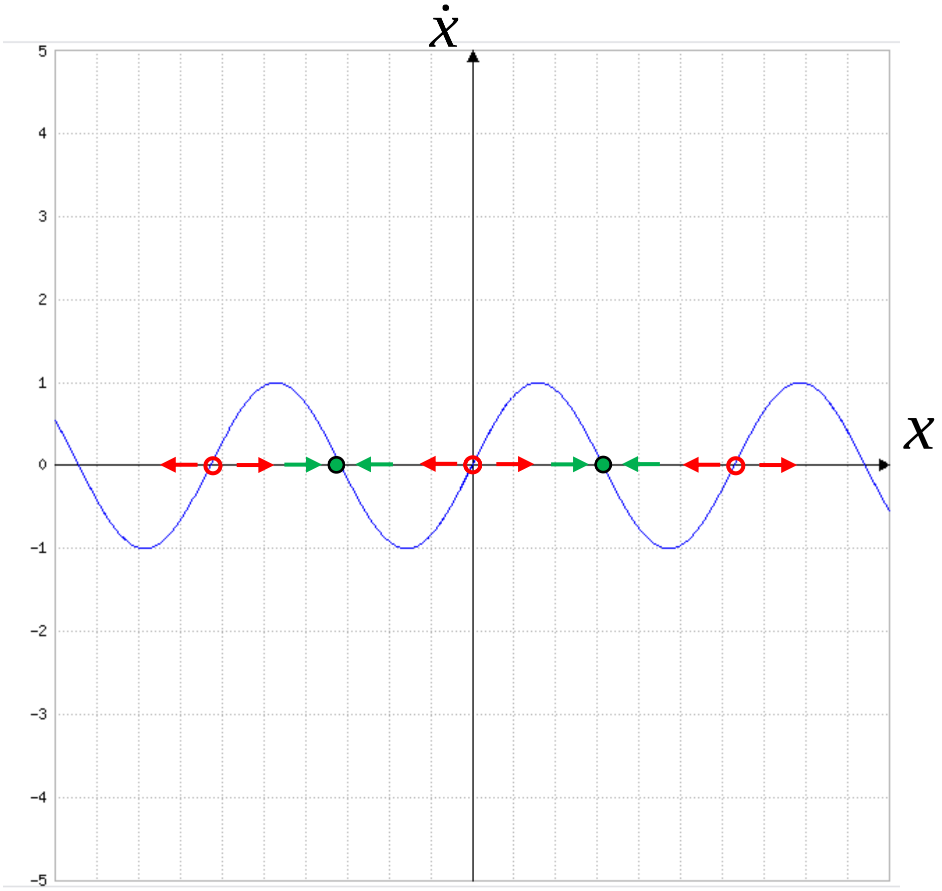
Le point d'équilibre est donc <u>stable</u>.

Au voisinage des points $x^{*} = (2k+1)\pi; k \in Z$, les modèles linéarisés autour de ces points sont au nombre infini et on cite quelques exemples:

- Pour $x^{*} = \pi$, $\begin{cases} \dot{x} = x + b \\ \dot{x} = 0, x = \pi \Rightarrow b = -\pi \Rightarrow \dot{x} = x - \pi \end{cases}$
- Pour $x^{*} = 3\pi$, $\begin{cases} \dot{x} = x + b \\ \dot{x} = 0, x = 3\pi \Rightarrow b = -3\pi \Rightarrow \dot{x} = x - 3\pi \end{cases}$
- Pour $x^{*} = -\pi$, $\begin{cases} \dot{x} = x + b \\ \dot{x} = 0, x = -\pi \Rightarrow b = +\pi \Rightarrow \dot{x} = x + \pi \end{cases}$

2ème stratégie de résolution (méthode graphique)

- On trace la courbe : $\dot{x} = f(x) = sin(x)$ et on indique les flèches selon les règles citées par l'exemple précédent afin de déduire les points d'équilibre stable et instables (voir figure).



(c)

Point d'équilibre :

Une dynamique nulle implique que : $\begin{cases} f_1 = \dot{x}_1 = x_1 = 0 \\ f_2 = x_1^2 - 3x_2 = 0 \end{cases}$

On trouve un seul point d'équilibre : $(x_1^*, x_2^*) = (0,0)$

Nature de stabilité des points d'équilibre :

1ère stratégie de résolution (méthode analytique)

- *Autour du point* $(x_1^*, x_2^*) = (0,0)$

On linéarise ce système en commençant par la matrice jacobéenne :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2x_1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = J\Big|_{(x_1^*, x_2^*)=(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Alors, le système linéarisé sera :

$$\dot{X} = A.X \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = -3x_2 \end{cases}$$

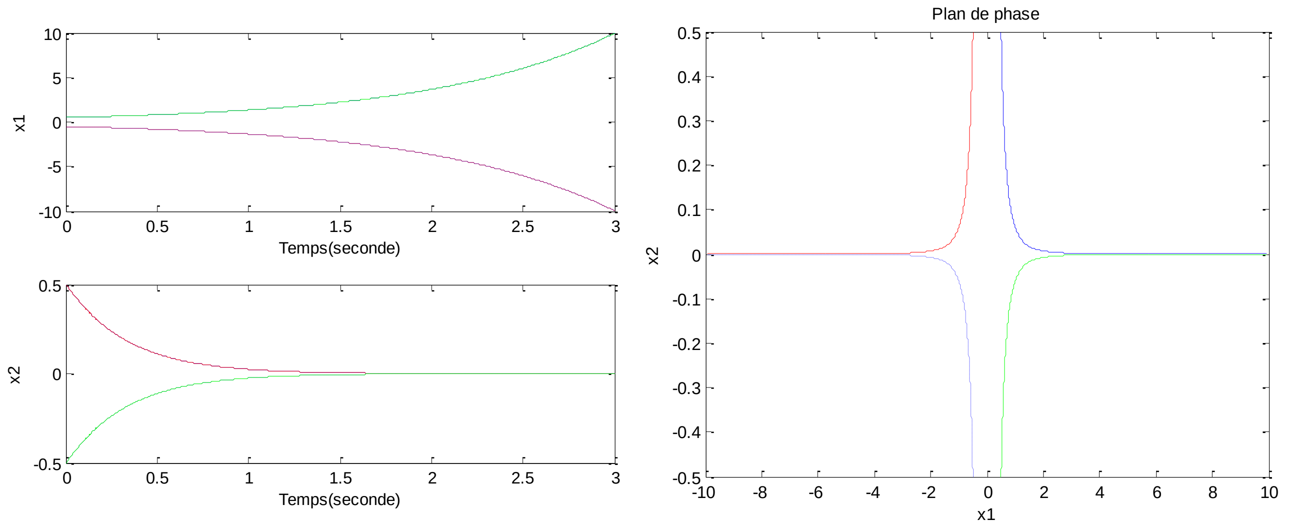
Pour trouver les valeurs propres, il faut que : $dét\left(A - \lambda I\right) = 0$

$$dét\left(A - \lambda I\right) = \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-3-\lambda) = 0$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -3$. Par conséquent le point d'équilibre $(0,0)$ est un point selle puisque λ_1 et λ_2 sont réelles de signes opposés (instable).

2ème stratégie de résolution (méthode graphique)

La méthode de tracer ces graphes sera développée dans le deuxième TP.



(d)

Point d'équilibre :

Une dynamique nulle implique que : $\begin{cases} f_1 = \dot{x}_1 = x_2 = 0 \\ f_2 = -sin\left(x_1\right) = 0 \end{cases}$

On trouve une infinité de points d'équilibre : $\left(x_1^*, x_2^*\right) = \left(k\pi, 0\right) \quad ; k \in Z$

Nature de stabilité des points d'équilibre :

1ère stratégie de résolution (méthode analytique)

On linéarise ce système en commençant par la matrice jacobéenne :

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -cos\left(x_1\right) & 0 \end{pmatrix}$$

Les points $\left(x_1^*, x_2^*\right) = \left(k\pi, 0\right) \quad ; k \in Z$ peuvent être divisés en deux parties : $\left(x_1^*, x_2^*\right) = \left(\left(2k+1\right)\pi, 0\right)$ et $\left(x_1^*, x_2^*\right) = \left(2k\pi, 0\right); k \in Z$

- *Linéarisation autour des points* $\left(x_1^*, x_2^*\right) = \left(2k\pi, 0\right); k \in Z$

$$A = J\Big|_{(x_1,x_2)=(2k\pi,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors, le système linéarisé sera : $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$

Pour trouver les valeurs propres, il faut que : $dét\left(A - \lambda I\right) = 0$

$$dét\left(A - \lambda I\right) = \left|\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = -i$ et $\lambda_2 = +i$. Par conséquent le point d'équilibre $\left(x_1^*, x_2^*\right) = \left(2k\pi, 0\right)$ est un point centre puisque λ_1 et λ_2 sont purement immaginaires à parties réelles nulles. On a donc une stabilité pour le système linéarisé, mais on ne peut rien dire sur le système de départ. Dans ce cas, on est obligé d'utiliser la deuxième méthode directe de Lyapunov.

- *Linéarisation autour des points* $\left(x_1^*, x_2^*\right) = \left(\left(2k+1\right)\pi, 0\right); k \in Z$

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -cos\left(x_1\right) & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = J\Big|_{(x_1,x_2)=((2k+1)\pi,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors, le système linéarisé sera : $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$

Pour trouver les valeurs propres, il faut que : $dét\left(A - \lambda I\right) = 0$

$$dét\left(A - \lambda I\right) = \left|\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0 = 1$. Par conséquent le point d'équilibre $\left(x_1^*, x_2^*\right) = \left(\left(2k+1\right)\pi, 0\right)$ est une étoile ou un nœud dégénéré instable.

Exercice n°8 (supplémentaire)

Pour les systèmes non linéaires suivants, trouver les systèmes linéaires qui les approximent au voisinage des points d'équilibre indiqués et étudier la nature de stabilité de ces points:

$$(a)\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_1\\ \dot{x}_2 = x_1^3 - x_2\end{cases} \qquad (b)\begin{cases}\dot{x}_1 = x_1\\ \dot{x}_2 = x_1^3 + x_2\end{cases}$$

Exercice n°9 (supplémentaire)

Pour chaque système non linéaire, propose une fonction de Lyapunov quadratique pour identifier la nature de stabilité de l'origine. Vérifie s'il est globalement asymptotiquement stable.

$$(a)\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_1 - x_1x_2\\ \dot{x}_2 = -x_2\end{cases} \quad (b)\begin{cases}\dot{x} = -x - xy^2\\ \dot{y} = -y + 3x^2y\end{cases} \quad (c)\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_1 - x_1x_2^2\\ \dot{x}_2 = -x_2\end{cases} \quad (d)\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_2 - x_1\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right)\\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right)\end{cases}$$

$$(e)\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_1 - x_2\\ \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2^3\end{cases} \quad (f)\ \dot{x}(t) = 3.x(t).\left(1 - \frac{x(t)}{2}\right) \ldots\ldots \quad (g)\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_1\\ \dot{x}_2 = x_1^3 - x_2\end{cases} \quad (h)\begin{cases}\dot{x}_1 = x_1\\ \dot{x}_2 = x_1^3 + x_2\end{cases}$$

Exercice n°10 (supplémentaire)

Soit :
$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_1 - \dfrac{2x_2}{ln\left(x_1^2 + x_2^2\right)}\\[2ex] \dot{x}_2 = -x_2 + \dfrac{2x_1}{ln\left(x_1^2 + x_2^2\right)}\end{cases}$$

Sur $D = \left\{\left(x_1, x_2\right) : x_1^2 + x_2^2 < 1\right\}$.

1/ Montrer que (0,0) est une position d'équilibre.

2/ Linéariser le système et étudier la nature de son point d'équilibre.

Exercice n°11 (supplémentaire)

Soit le système d'un ressort à comportement non linéaire et l'équation différentielle qui le caractérise est : $m\ddot{z} = F + k_1 z + k_2 z^3$.

- Entrée : $u(t) = F$
- Sortie : $y(t) = z(t)$
- Etas du système : $x_1(t) = z(t); x_2(t) = \dot{z}(t)$

1/ Donner la représentation d'état du système.
2/ Linéariser ce modèle au voisinage du point de repos.
3/ Déterminer le point de fonctionnement.