Université : Batna 2	Batna 22/04/2019
Faculté de Technologie	
Département : Electronique	
Option : Master 1 Automatique et Systèmes	

TP n°1 : Introduction au Systèmes Non linéaires

« Pendule simple »

But

L'idée de ce TP est d'apprendre la notion de systèmes non linéaires. Le pendule simple est l'exemple typique pour ce sujet. Le but est d'étudier l'influence de l'approximation $\sin\theta \approx \theta$ (dite approximation aux petits angles) faite classiquement dans l'étude du pendule simple soumis à une force de frottement (de friction).

Principe

Rappelons que l'angle $\theta(t)$ que fait un pendule avec la verticale vérifie l'équation différentielle non linéaire :

$$\boxed{m.l^2.\theta'' + mgl.\sin(\theta) + K.\theta' = 0}$$

tel que : m : masse de la tige ; l : sa longueur ; K : coefficient de frottement

et avec $K=0$, on aura:

$$\theta'' + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$$

« Les oscillations sont libres s'il n'y aucune intervention extérieure »

« Elles sont non amorties si les frottements peuvent être négligés »

Les solutions de cette équation ne peuvent pas s'écrire avec les fonctions usuelles. Dans les études passées, on enseigne plutôt l'équation différentielle linéaire $\theta'' + \frac{g}{l}\theta = 0$ en supposant que le déplacement angulaire est petit. On retrouve alors une équation différentielle homogène du 2nd ordre ; les solutions en sont des fonctions sinusoïdales dont la période propre T_0 apparaît dans l'équation sous la forme $T_0 = 2\pi.\sqrt{\frac{l}{g}}$, tel que $\omega^2 = \frac{g}{l}$.

Cependant, il existe des méthodes permettant de résoudre l'équation différentielle non linéaire $\theta'' + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$ de manière approchée, MATLAB fournit de telles méthodes. L'usage de ces méthodes approchées va nous permettre de voir dans quelle mesure l'approximation *sin* $\theta \approx \theta$ impacte les solutions quand θ n'est pas nécessairement petit.

Pour ce pendule, on supposera dans la suite que : $m=0.1kg$; $g=10m/s^2$; $l = 0,23m$.

Etude du système par Matlab

1/ Cas linéaire :

1.a/ Pour : $\theta(0)=\theta_0$; $\theta'(0)=0$; $K=0$ et pour des faibles valeurs de θ, trouver l'expression $\theta'' + \frac{g}{l}\theta = 0$?

1.b/ Déduire la solution de cette équation différentielle ainsi que la période T_0 ?

1.c/ Mettre l'équation différentielle sous la forme d'équations d'état $x' = f(t,x)$? Dans notre cas, cela nécessite de mettre l'équation du second ordre sous la forme d'un système d'équations de premier ordre.

NB. Choisir la variable d'état x_1 représentant la position angulaire $x_1 = \theta$ et x_2 est celle de la vitesse angulaire $x_2 = \theta'$

2/ Cas non linéaire :

Refaire la question (1.c) pour le système $\theta'' + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$?

3/ Simulation par Matlab des deux cas

3.1/ Tracer l'allure de x_1 sur la même figure des deux cas (linéaire et non linéaire) ainsi que x_2 en utilisant l'outil Matlab pour les différentes valeurs initiales: $(\theta_0, \dot{\theta}_0) = (0.5,0);(1,0);(2,0);(3,0);(4,0);(2,8)$. Quels sont vos commentaires ?

3.2/ Tracer l'évolution dans l'espace de phase $(\theta, \dot{\theta})$ des deux systèmes (système linéarisé et non linéaire) dans la même figure pour les différentes valeurs initiales:

$(\theta_0, \dot{\theta}_0) = (0.5,0);(1,0);(2,0);(3,0);(4,0);(2,8)$. Conclure ?

4/ Influence de K

4.1/ Trouver le nouveau système d'équations d'état pour un coefficient K non nul ?

4.2/ Pour des valeurs positives ou négatives (exemple : K=1 ; K=0,1 ; K=-0,01 ; -0,03) et $(\theta_0, \dot{\theta}_0) = (2,0)$, tracer l'allure de x_1 et de x_2 ?. Quels sont vos commentaires ?

4.3/ Tracer l'évolution dans l'espace de phase $(\theta, \dot{\theta})$ des deux systèmes ? Déduire.

Etude du système par Simulink

a/ Pour le système $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{K}{m.l^2}x_2 \end{cases}$; construire par Simulink sa représentation d'état ?

b/ Visualiser la sortie x_1 pour (K=0 ; 0.1 ; -0.1) ?