TP n°1 : Introduction au Systèmes Non linéaires
« Pendule simple »

But

L'idée de ce TP est d'apprendre la notion de systèmes non linéaires. Le pendule simple est l'exemple typique pour ce sujet. Le but est d'étudier l'influence de l'approximation $\sin\theta \approx \theta$ (dite approximation aux petits angles) faite classiquement dans l'étude du pendule simple soumis à une force de frottement (de friction).

Principe

Rappelons que l'angle $\theta(t)$ que fait un pendule avec la verticale vérifie l'équation différentielle non linéaire :

$$\boxed{m.l^2.\theta'' + mgl.\sin(\theta) + K.\theta' = 0}$$

tel que : m : masse de la tige ; l : sa longueur ; K : coefficient de frottement

et avec $K=0$, on aura:

$$\theta'' + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$$

« Les oscillations sont libres s'il n'y aucune intervention extérieure. Elles sont non amorties si les frottements peuvent être négligés »

Les solutions de cette équation ne peuvent pas s'écrire avec les fonctions usuelles. Dans les études passées, on enseigne plutôt l'équation différentielle linéaire $\theta'' + \frac{g}{l}\theta = 0$ en supposant que le déplacement angulaire est petit. On retrouve alors une équation différentielle homogène du 2^{nd} ordre ; les solutions en sont des fonctions sinusoïdales dont la période propre T_0 apparaît dans l'équation sous la forme $T_0 = 2\pi.\sqrt{\frac{l}{g}}$, tel que $\omega^2 = \frac{g}{l}$.

Cependant, il existe des méthodes permettant de résoudre l'équation différentielle non linéaire $\theta'' + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$ de manière approchée, MATLAB fournit de telles méthodes. L'usage de ces méthodes approchées va nous permettre de voir dans quelle mesure l'approximation $\sin\theta \approx \theta$ impacte les solutions quand θ n'est pas nécessairement petit.

Pour ce pendule, on supposera dans la suite que $m=0.1kg$; $g=10m/s^2$, $l = 0,23m$.

Etude du système par Matlab

1/ Cas linéaire :

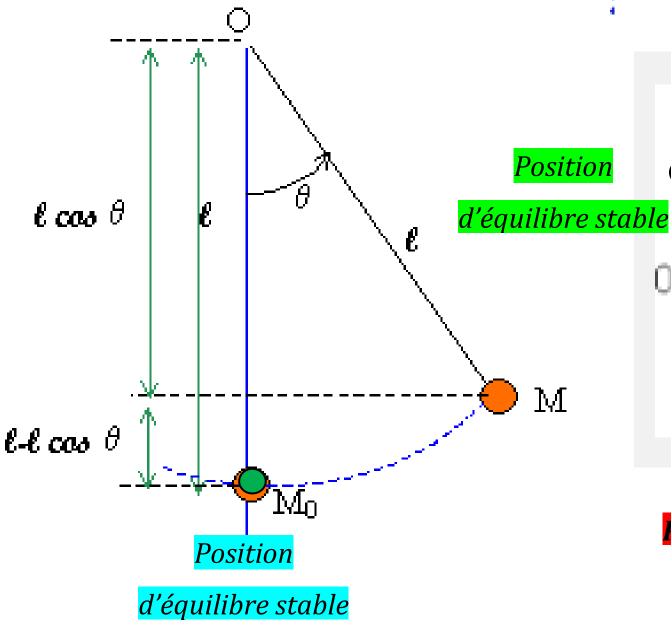
1.a/ Pour $\theta(0) = \theta_0$ et $\theta'(0) = 0$ et faibles θ, trouver l'expression $\theta'' + \frac{g}{l}\theta = 0$?

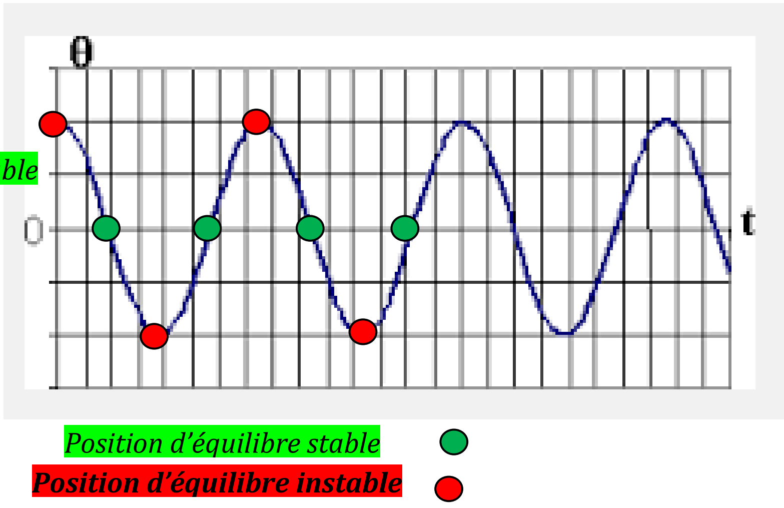
1.b/ Déduire la solution de cette équation différentielle ainsi que la période T_0 ?

La forme de la solution est $\theta(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ sa dérivée est $\theta'(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$

Pour $\theta'(0) = A\omega\cos(\varphi) = 0$ alors $\varphi = \frac{\pi}{2}$ donc $\theta(t) = A\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ et $\theta(0) = A\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = A = \theta_0$ ce qui implique : $\theta(t) = \theta_0\cos(\omega t)$

1.c/ Mettre l'équation différentielle sous la forme d'équations d'état $x' = f(t,x)$? Dans notre cas, cela nécessite de mettre l'équation du second ordre sous la forme d'un système d'équations de premier ordre.





NB. Choisir la variable d'état x_1 qui représente la position angulaire $x_1 = \theta$ et x_2 et celle de la vitesse angulaire $x_2 = \theta'$

Alors le système d'équations d'état sera :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{g}{l} x_1 \end{cases}$$

NB : Le déplacement angulaire θ est x_1 modulo 2π

2/ Cas non linéaire :

Refaire la question (1.c) pour le système $\theta'' + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$?

Choisir la variable d'état x_1 égale à la position angulaire $x_1 = \theta$ et x_2 égale à la vitesse angulaire $x_2 = \theta'$

Alors le système d'équations d'état sera :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{g}{l} \sin x_1 \end{cases}$$

3/ Simulation par Matlab des deux cas

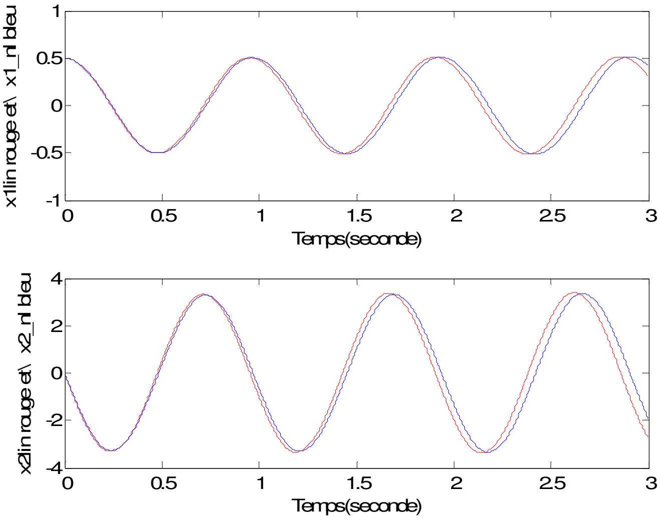
3.1/ Tracer l'allure de x_1 sur la même figure des deux cas (linéaire et non linéaire) ainsi que x_2 en utilisant l'outil Matlab pour les différentes valeurs initiales: $(\theta_0, \dot{\theta}_0) = (0.5, 0); (1, 0); (2, 0); (3, 0); (4, 0); (2, 8)$. Quels sont vos commentaires ?

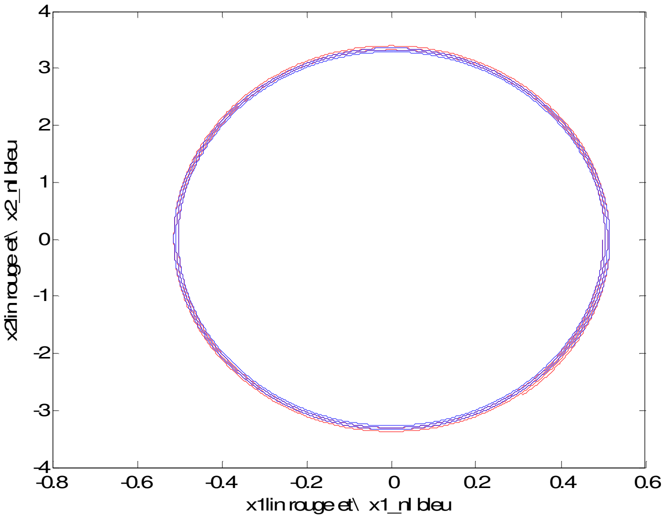
3.2/ Tracer l'évolution dans l'espace de phase $(\theta, \dot{\theta})$ des deux systèmes (système linéarisé et non linéaire) dans la même figure pour les différentes valeurs initiales: $(\theta_0, \dot{\theta}_0) = (0.5, 0); (1, 0); (2, 0); (3, 0); (4, 0); (2, 8)$. Conclure ?

Programme

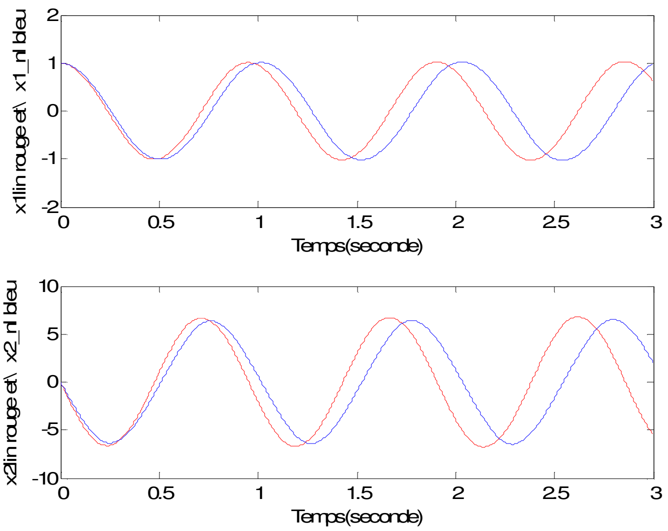
```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%                  Système non linéaire "Pendule simple"                               %
%           dx1_L/dt=x2_L ;dx2_L/dt=(-g/l).x1_L-(K/m).x2_L      cas linéaire           %
%        dx1_NL/dt=x2_NL ; dx2_NL/dt=(-g/l).sinx1_NL-(K/m).x2_NL    cas non linéaire   %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all
clc

%Intervalle
temps=3;%0.1;   %0.1 pour le cas K=-1
%état initial
x1_L(1,1)=0.5;x1_NL(1,1)=0.5;x2_L(1,1)=0;x2_NL(1,1)=0;
%x1_L(1,1)=1;x1_NL(1,1)=1;x2_L(1,1)=0;x2_NL(1,1)=0;
%x1_L(1,1)=2;x1_NL(1,1)=2;x2_L(1,1)=0;x2_NL(1,1)=0;
%x1_L(1,1)=3;x1_NL(1,1)=3;x2_L(1,1)=0;x2_NL(1,1)=0;
%x1_L(1,1)=4;x1_NL(1,1)=4;x2_L(1,1)=0;x2_NL(1,1)=0;
%x1_L(1,1)=2;x1_NL(1,1)=2;x2_L(1,1)=8;x2_NL(1,1)=8;

%valeurs des paramètres
g=10;
l=0.23;                    %longueur du pendule
m=0.1;                     %masse du pendule
K=0;                       %coefficient de friction nul
%K=1;                      %coefficient de friction positif
%K=-0.1;%-0.01             %coefficient de friction négatif

T=0.0005;
k=temps/T;
%MODELE DU SYSTEME
for t=1:k;
x1_L(1,t+1)=T*x2_L(1,t)+x1_L(1,t);
x2_L(1,t+1)=T*(-(g/l)*x1_L(1,t)-(K/m/l/l)*x2_L(1,t))+x2_L(1,t);

x1_NL(1,t+1)=T*x2_NL(1,t)+x1_NL(1,t);
x2_NL(1,t+1)=T*(-(g/l)*sin(x1_NL(1,t))-(K/m/l/l)*x2_NL(1,t))+x2_NL(1,t);

end
b=0:k-1;
t=1:k;
subplot(2,1,1),plot(b*T,x1_L(1,t),'r',b*T,x1_NL(1,t),'b');
ylabel('x1lin rouge et\  x1_nl bleu');
xlabel('Temps(seconde)');
%AXIS([0 temps -4 4])

subplot(2,1,2),plot(b*T,x2_L(1,t),'r',b*T,x2_NL(1,t),'b');
ylabel('x2lin rouge et\  x2_nl bleu');
xlabel('Temps(seconde)');

pause
figure,
plot(x1_L(1,t),x2_L(1,t),'r',x1_NL(1,t),x2_NL(1,t),'b'); % Représentation dans le plan de
phase linéaire et non linéaire
ylabel('x2lin rouge et\  x2_nl bleu');
xlabel('x1lin rouge et\  x1_nl bleu');
%pause
%figure,
%plot(x1_L(1,t),x2_L(1,t),'r'); % Représentation dans le plan de phase cas linéaire
%ylabel('x2lin'); xlabel('x1lin');
%pause
%figure,
%plot(x1_NL(1,t),x2_NL(1,t),'b'); % Représentation dans le plan de phase cas non linéaire
%ylabel('\x2_nl');xlabel('\x1_nl');
```

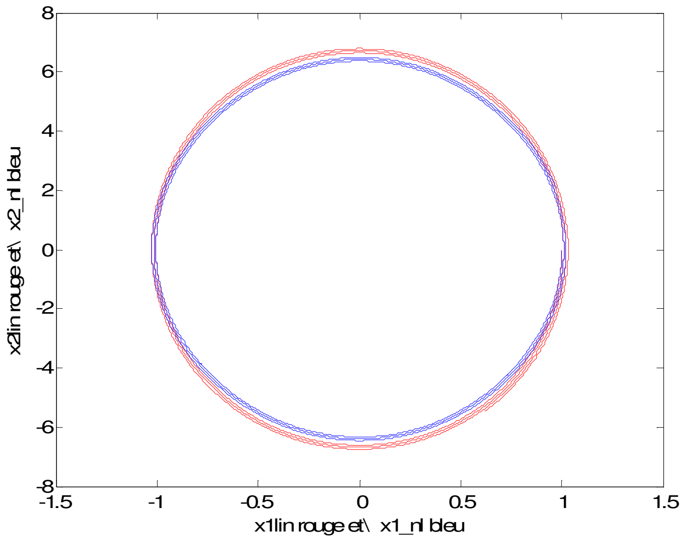
$\left(\theta_0,\dot{\theta}_0\right)=\left(0.5,0\right)$ et K=0



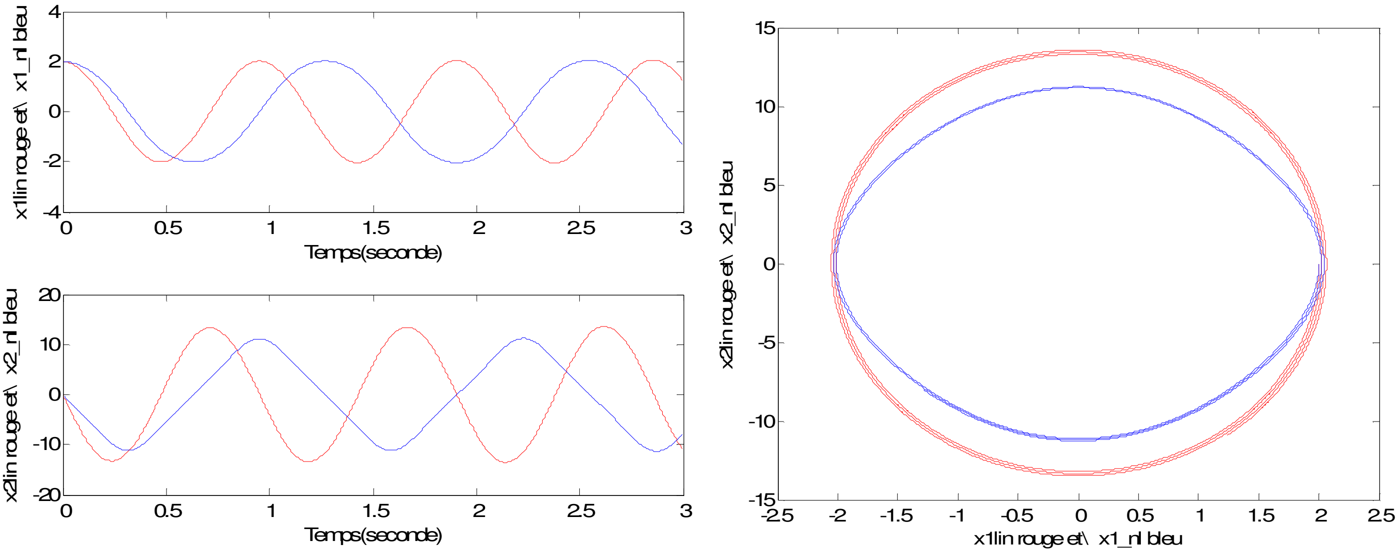


$\left(\theta_0,\dot{\theta}_0\right)=\left(1,0\right)$ et K=0

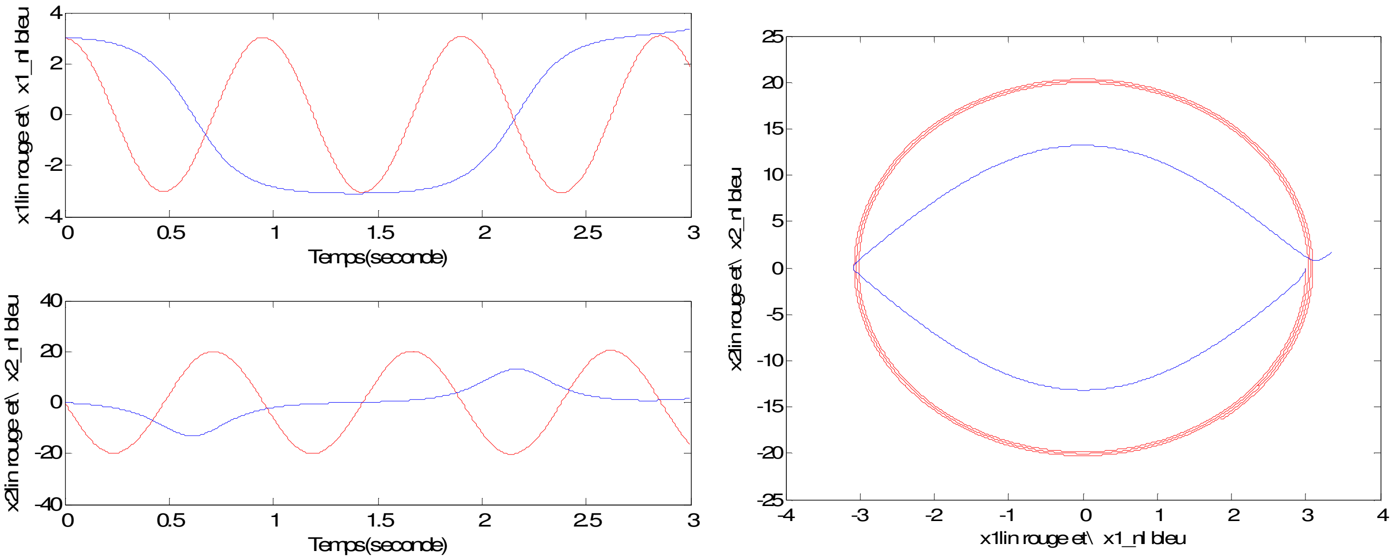




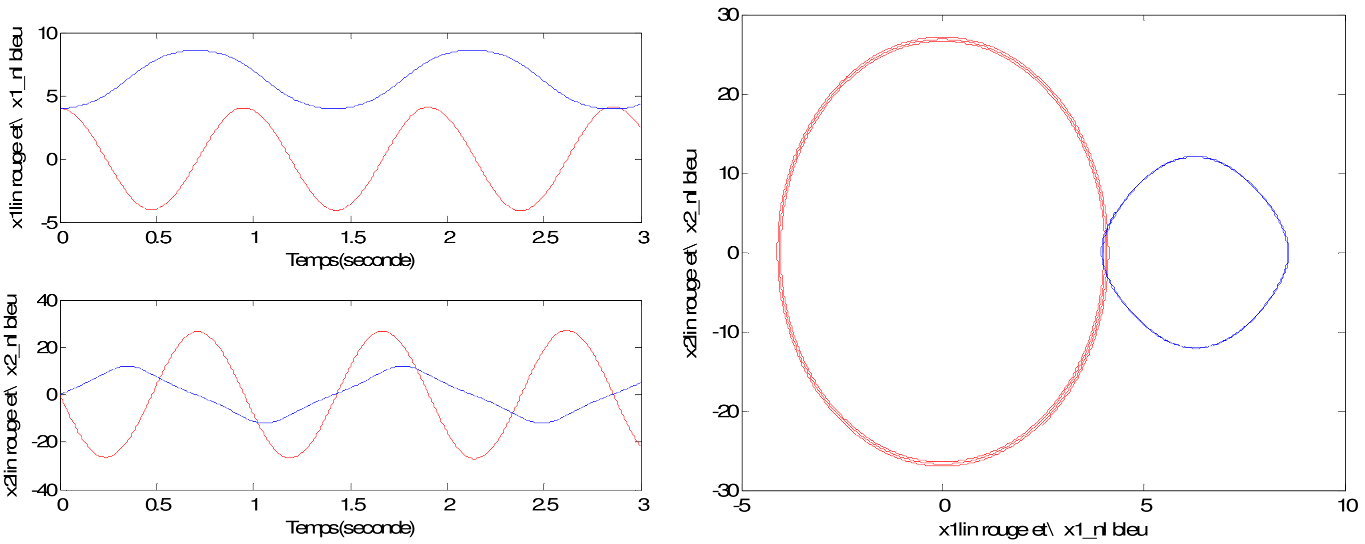
$\left(\theta_0,\dot{\theta}_0\right)=\left(2,0\right)$ et K=0



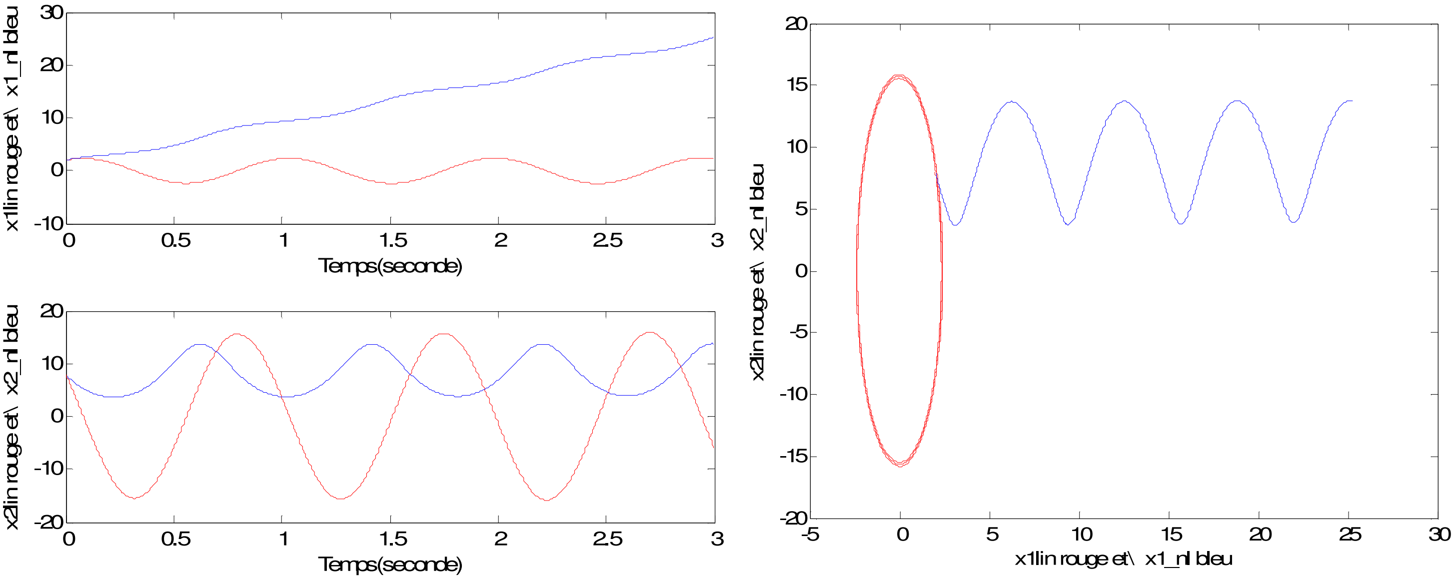
$\left(\theta_0, \dot{\theta}_0\right) = (3, 0)$ et K=0



$\left(\theta_0, \dot{\theta}_0\right) = (4, 0)$ et K=0



$\left(\theta_0, \dot{\theta}_0\right) = \left(2, 8\right)$ et K=0



Conclusions :

- On a un phénomène physique oscillatoire en l'absence d'amortissement pour le système linéarisé
- On a une divergence de la réponse du système non linéaire une fois on a dépassé une certaine limite de la condition initiale (écartement de la plage linéaire pour un comportement non linéaire du système) ce qui exige une commande externe.
- Le plan de phase pour $\left(\theta_0, \dot{\theta}_0\right) = \left(0.5, 0\right)$ et K=0 montre que les deux modèles sont stables autour de la position d'équilibre $\theta_{eq} \approx 0rad$ mais le cas où $\left(\theta_0, \dot{\theta}_0\right) = \left(4, 0\right)$ et K=0 montre que le système non linéaire est stable autour de la position d'équilibre $\theta_{eq} \approx 6rad(2\pi)$

4/ Influence de K

4.1/ Trouver le nouveau système d'équations d'état pour un coefficient K non nul ?

Avec $m.l^2.\theta'' + mgl.\sin\left(\theta\right) + K.\theta' = 0$

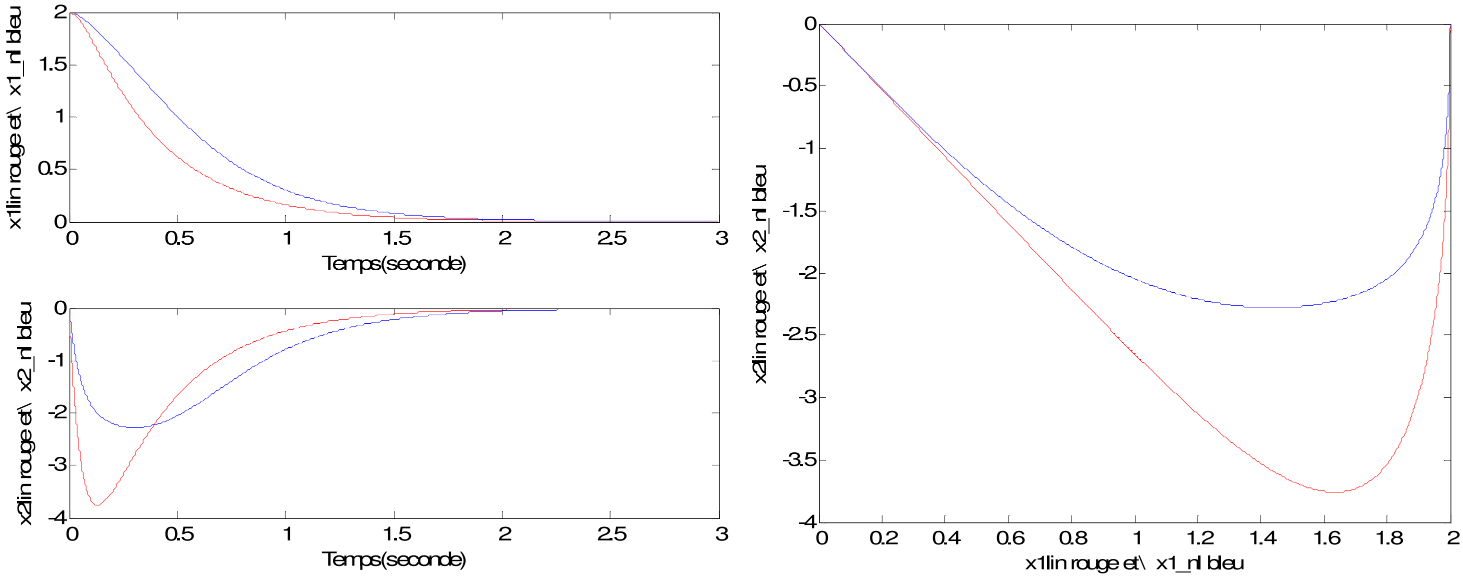
Le système d'équations d'état s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{g}{l}\sin x_1 - \dfrac{K}{m.l^2} x_2 \end{cases}$$

4.2/ Pour des valeurs positives ou négatives (exemple : K=0,1 ; K=-0,01 ; -0,03) et $\left(\theta_0, \dot{\theta}_0\right) = \left(2, 0\right)$, tracer l'allure de x_1 et de x_2 ?. Quels sont vos commentaires ?

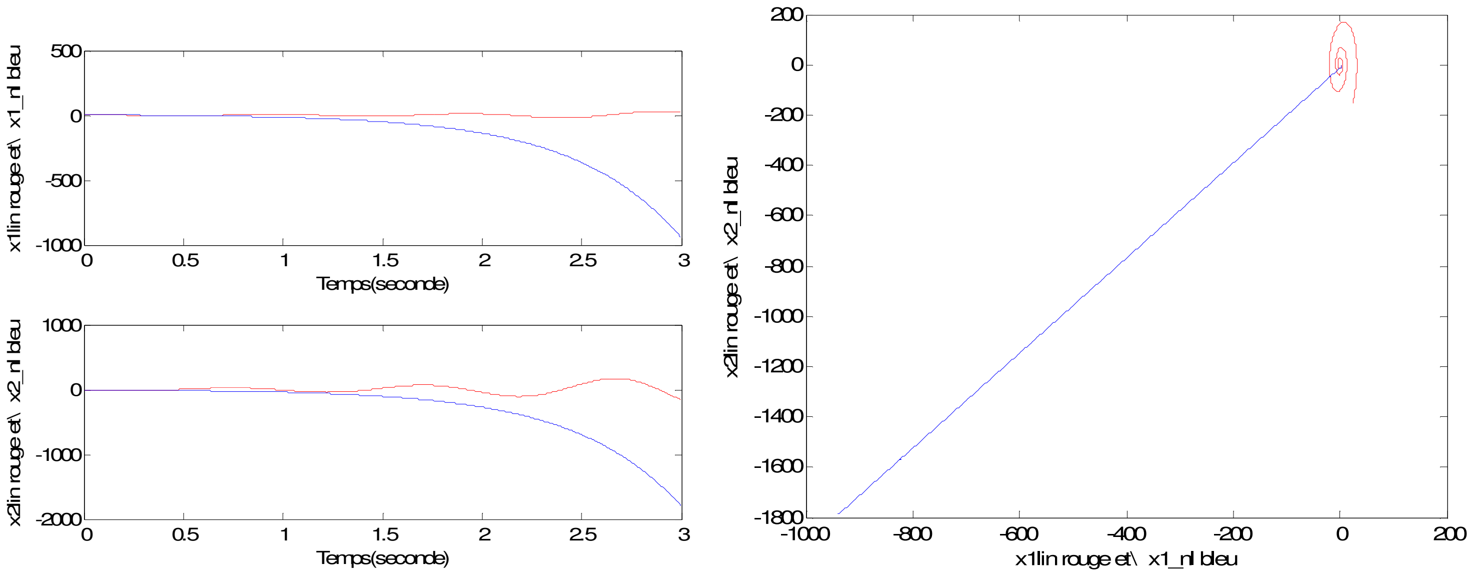
4.3/ Tracer l'évolution dans l'espace de phase $\left(\theta, \dot{\theta}\right)$ des deux systèmes ?. Déduire.

$K = 0,1; \left(\theta_0, \dot{\theta}_0\right) = \left(2, 0\right)$

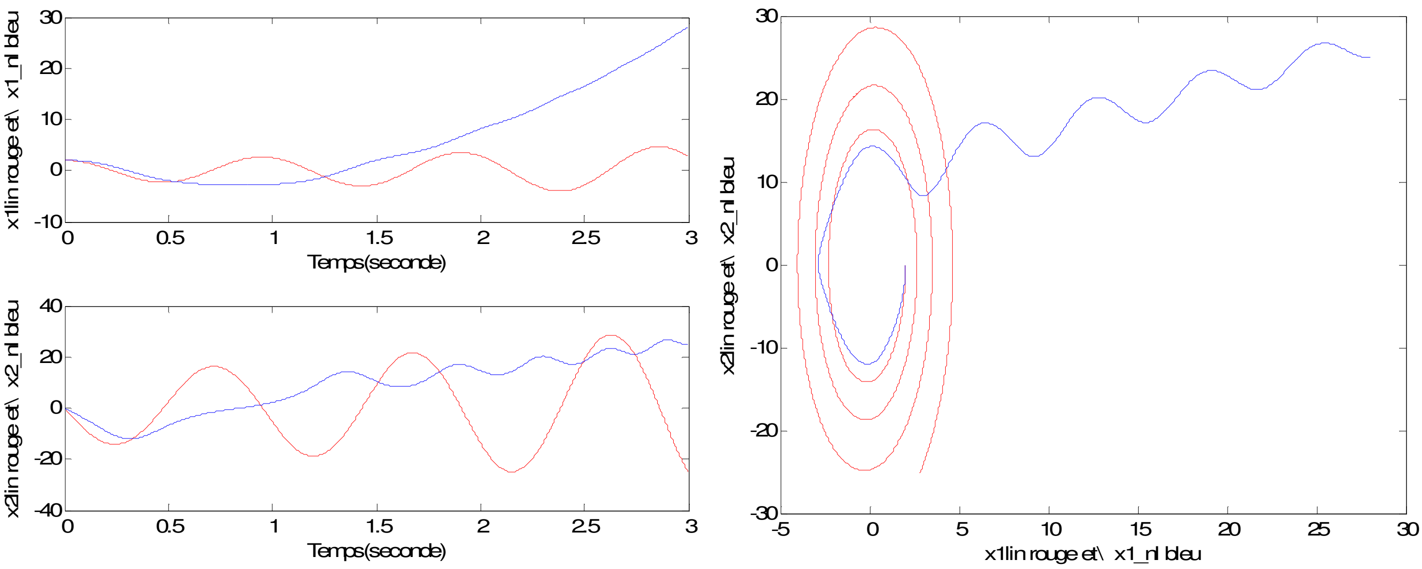


Le retour à l'équilibre du système se fait là encore sans osciller car l'amortissement est devenu trop important. Il s'agit du cas où le retour à l'équilibre est le plus rapide.

$K = -0,01; \left(\theta_0, \dot{\theta}_0\right) = \left(2, 0\right)$



$K = -0,003; \left(\theta_0, \dot{\theta}_0\right) = \left(2, 0\right)$

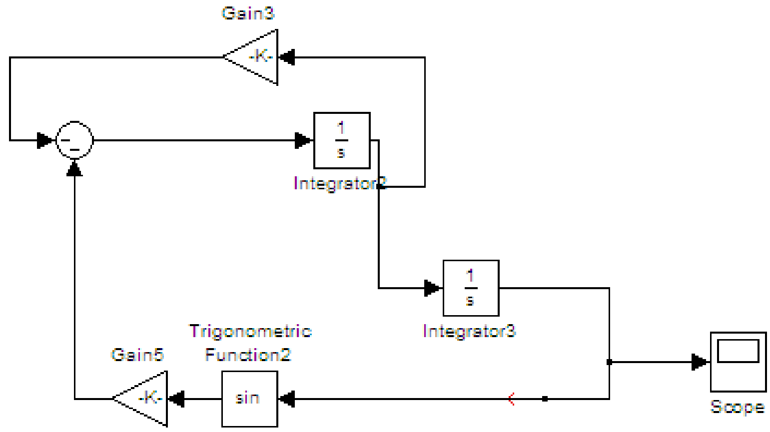


Etude du système par Simulink

a/ Pour le système $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{g}{l}\sin x_1 - \dfrac{K}{m.l^2}x_2 \end{cases}$, construire par Simulink la représentation d'état ?

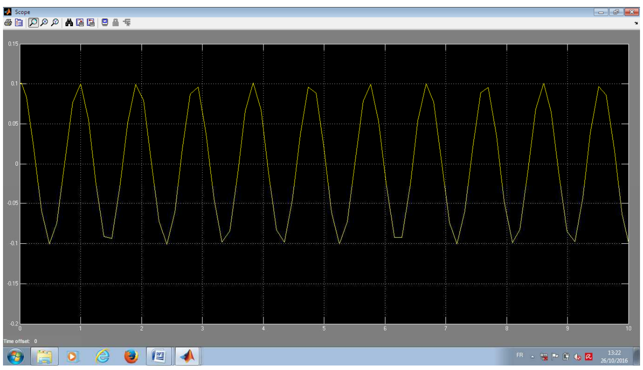
Condition initiale de l'intégrateur 0,1

Gain3=K/m.l^2
Gain5=g/l



b/ Visualiser la sortie x_1 pour (K=0 ; 0.1) ?

K=0



K=0,1