Corrigé type de la série : 02 · Analyse

EX01 · 1. posons $t^2 = 1+x$ (*) $\Rightarrow 2t \cdot dt = dx$

devient que $J_1 = \int \frac{dx}{1+\sqrt{1+x}} = 2\int \frac{t \cdot dt}{1+t}$

$= 2\int \frac{(t+1)-1}{1+t} dt = 2\int \frac{(1+t)}{1+t} dt - 2\int \frac{dt}{1+t}$

$= 2t - \ln\left[\frac{(1+t)^2}{c}\right] = 2t - \ln(1+t)^2 + \ln(c)$

et de l'égalité (*), il vient $t = \sqrt{x+1}$ d'où

que : $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x+1} - \ln(1+\sqrt{x+1})^2 + \ln c$

où c est constante positif.

2. posons $t = x-2 \Rightarrow dt = dx$ et suivre

les mêmes techniques de calcul que l'intégrale

1 et vous trouvez $J_2 = \int \frac{4x+3}{(x-2)^3} dx = \boxed{\frac{-4}{x-2} - \frac{11}{2(x-2)^2} + c}$

3. posons $x = t^3 \Rightarrow dx = 3t^2 \times dt$

devient que $J_3 = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} dx = \int \frac{t^{3/2}}{t^{3/2} - t} \times 3t^2 dt$

(après la réduction sur t)

$= 3\int \frac{t^{5/2}}{t^{1/2} - 1} dt$

page 1

et posons $t = u^2 \Rightarrow dt = 2u\,du$

obtenons $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx = 6\left(\frac{x^{6/6}}{6}+\frac{x^{5/6}}{5}+\frac{x^{4/6}}{4}+\frac{x^{3/6}}{3}+\frac{x^{2/6}}{2}\right.$

$\left.+x^{1/6}\right)+6\ln|x^{1/6}-1|+C$.

4- posons $x=\frac{1}{t}$ ou $x=\operatorname{arctang}(t)$ et utilisez les même techniques de calcul, en fin vous trouverez $\boxed{J_4 = -\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+a^2}\right|+C}$

5- La même chose pour $J_5=\int \sqrt{\sin x}\cos x$

poser $u^2=\sin x \Rightarrow 2u\,du=\cos x\cdot dx$

et en fin vous trouverez $\boxed{J_5=\frac{2}{3}\sin^{3/2}+C}$

6- poser $u=1+\cos x \Rightarrow du=[1+\cos x]'\,dx$

$=-\sin x\cdot dx$

et en fin $J_6=-\int\frac{du}{u}=-\ln\left[\frac{|u|}{c}\right]$

$=\boxed{-\ln|1+\cos x|+C_1}$ $(C_1=cte)$

7- poser $u=\frac{1}{x}\Rightarrow du=\left(\frac{1}{x}\right)'\cdot dx$

$=-\frac{1}{x^2}\,dx$

d'où que $J_7=\int\cos u\cdot du=\sin u+C$

$=\boxed{\sin\left(\frac{1}{x}\right)+C}$ où $C=cte$

page 2

8- poser $u^2 = 1 + \ln(x) \Rightarrow 2u \cdot du = \frac{dx}{x}$

il en resulte $J_8 = \int \frac{u \cdot 2u \cdot du}{u^2 - 1} = 2 \int \frac{(u^2-1)+1}{u^2-1} du$

$= 2 \int \frac{\cancel{u^2-1}}{\cancel{u^2-1}} du + 2 \int \frac{du}{u^2-1}$; page 3

On voit que $u^2 - 1 = (u-1)(u+1) \Rightarrow$

$\frac{1}{u^2-1} = \frac{1}{(u-1)(u+1)} = \frac{1/2}{u-1} - \frac{1/2}{u+1}$.

D'où que : $J_8 = 2 \int du + \int \frac{du}{u-1} - \int \frac{du}{u+1}$

$= 2u + \ln(|u-1|) - \ln(|u+1|) + C$

$= 2u + \ln\left(\frac{|u-1|}{|u+1|}\right) + C$ où $C = cte$

$$\boxed{= 2\sqrt{1+\ln(x)} + \ln\left(\left|\frac{\sqrt{1+\ln(x)} - 1}{\sqrt{1+\ln(x)} + 1}\right|\right) + C}$$

EX:02. 1. $J_1 = \int x \cdot \ln(x) \, dx$. D'après l'expression de l'intégrale par partie suivante :

$\int u'(x) \cdot v(x) \, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) dx$

posons $v(x) = \ln(x) \Rightarrow v'(x) \cdot dx = \frac{1}{x} \cdot dx$

$u'(x) = x \Rightarrow u(x) = \frac{1}{2} x^2$

D'où que : $J_1 = \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{2} \int x^2 \cdot \frac{1}{x} dx$

$= \frac{1}{2} x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2}\right] + C$ où $C = cte$.

2 - utilisez la même technique de J_1, en posant : $v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$

$u'(x) = \sin x \Rightarrow u(x) = -\cos x$

et vous trouverez : $\boxed{J_2 = -x\cos x + \sin x + C}$

3 - La même technique, posez :

$v(x) = x^2 \Rightarrow v'(x) = 2x$

$u'(x) = 1 + \cos x \Rightarrow u(x) = x + \sin x$

et repétez-la en deuxième fois. En fin vous trouverez : $\boxed{J_3 = -\frac{1}{3}x^3 + (x^2 - 2)\sin x + 2x\cos x + C}$

4. La même technique, posez : $v(x) = \frac{\text{Arcsin}\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$

et $u'(x) = 1 \Rightarrow u(x) = x$

et en fin vous trouverez : page 4

$$\boxed{J_4 = -2\,\text{Arcsin}\sqrt{x}\cdot\cos\text{Arcsin}\sqrt{x} + \sqrt{x} + C}$$

5. en posant aussi la même téchnique, par prendre : $v(x) = \ln^2 x \Rightarrow v'(x) = 2\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}$

et $u'(x) = x^{-5/2} \Rightarrow u(x) = -\frac{2}{3}x^{-3/2}$

Ça pour la première fois d'intégrer

Après vous trouverez le résultat

Final, posez la même chose avec (en 2ème fois) page 5

$v(x) = \ln(x) \Rightarrow v'(x) = \frac{1}{x}$

et $u'(x) = x^{-5/2} \Rightarrow v(x) = -\frac{2}{3}x^{-3/2}$

En fin $\boxed{J_5 = -\frac{2}{3}\ln^2 x + \frac{8}{9}\left(\frac{\ln x}{x^{3/2}} + \frac{2}{3x^{3/2}}\right) + C}$

6- ici (la même technique) en prenant :

$v(x) = \ln(x) \Rightarrow v'(x) = \frac{1}{x}$

et $u'(x) = x^{n} \Rightarrow u(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ On a $n \neq -1$

En fin $\boxed{J_6 = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C}$

7. Ici (la même technique) en prenant :

$v(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow v'(x) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

$u'(x) = e^{x} \Rightarrow u(x) = e^{x}$

Après de trouver le résultat d'intégral en 1ère fois

Répétez-la en 2ème fois, par prendre :

$v(x) = \cos\frac{x}{2} \Rightarrow v'(x) = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ et $u'(x) = e^{x}$

il en résulte : $\frac{3}{4}J_7 = e^{x}\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}e^{x}\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right) + C$

Suite