Correction TD

Exercice : 01

Déterminons les limites suivantes :

① $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x) \cdot \sin(2x)}{1-\cos(x)} = \dfrac{0}{0}$ (F.I)

pour résoudre cette limite on utilise les limites usuelles

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{ax} = 1 \; / a \neq 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

pour cela, on divise le numérateur et le dénominateur par "x^2".

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) \cdot \sin(2x)}{1-\cos(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{\sin(x) \cdot \sin(2x)}{x^2}}{\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\underbrace{\dfrac{\sin(x)}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{2\dfrac{\sin(2x)}{2 \cdot x}}_{\to 2}}{\underbrace{\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}}_{\to \frac{1}{2}}}$$

$$= \boxed{4}.$$

② $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x^3}{x+1}} - x = +\infty - \infty$ (F.I)

On multiplie le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée.

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x+1}} - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{x^3}{x+1}} - x\right)\left(\sqrt{\frac{x^3}{x+1}} + x\right)}{\left(\sqrt{\frac{x^3}{x+1}} + x\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^3}{x+1} - x^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x+1}} + x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2}{(x+1)\left(\sqrt{\frac{x^3}{x+1}} + x\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2}{(x+1)\left[x\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}} + 1\right)\right]}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\underbrace{\frac{-x^2}{x^2+x}}_{\to -1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\left(\sqrt{\underbrace{\frac{x}{x+1}}_{\to 1}} + 1\right)}}_{\to \frac{1}{2}}\right].$$

$$= \boxed{-\frac{1}{2}}.$$

③ $\lim\limits_{x \to 1^<} \dfrac{1+\sqrt{1-x^2}-x}{x(1-x)} = \dfrac{0}{0}$ (F.I)

$$\lim_{x \to 1^<} \frac{1+\sqrt{1-x^2}-x}{x(1-x)} =$$

$$= \lim_{x \to 1^<} \left[\frac{1-x}{x(1-x)} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x(1-x)}\right].$$

$$= \lim_{x \to 1^<} \left[\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{(1-x)}\sqrt{(1+x)}}{x\left(\sqrt{1-x}\right)^2}\right]$$

* $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x}\sqrt{1+x}$

car ($x \to 1^<$, $\Rightarrow 1-x \to 0^+$).

$$= \lim_{x \to 1^<} \left[\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 1} + \frac{\cancel{\sqrt{(1-x)}}\sqrt{(1+x)}}{\underbrace{x\cancel{\sqrt{1-x}}}_{\sqrt{2}}\underbrace{\sqrt{1-x}}_{\to 0^+}}\right]$$

$$= \boxed{+\infty}$$

④ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1} = 1^{+\infty}$ (F.I)

On a : $\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1} = e^{\ln\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1}}$

$\boxed{y=a^x \Leftrightarrow y=e^{x\ln a}}$ $= e^{(2x+1)\ln\left(\frac{x+3}{x-2}\right)}$

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} e^{(2x+1)\ln\left(\frac{x+3}{x-2}\right)}$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)\ln\left(\frac{x+3}{x-2}\right) = +\infty\cdot 0$ (F.I)

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)\ln\left(\frac{x+3}{x-2}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{x+3}{x-2}\right)}{\frac{1}{2x+1}} = \frac{0}{0}$ (F.I)

Donc on peut appliquer Règle de l'Hôpital.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{x+3}{x-2}\right)}{\frac{1}{2x+1}} \overset{R.H}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{\left(\frac{x+3}{x-2}\right)'}{\left(\frac{x+3}{x-2}\right)}}{\left(\frac{1}{2x+1}\right)'}$

$= 10$.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1} = \boxed{e^{10}}$.

⑤ $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3} = \frac{0}{0}$ (F.I)

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3} =$ } par factorisation.

$= \lim\limits_{x\to a}\frac{\cancel{(x-a)}(x-1)}{\cancel{(x-a)}(x^2+ax+a^2)}$

$= \lim\limits_{x\to a}\frac{x-1}{x^2+2x+a^2} = \boxed{\frac{a-1}{3a^2}}$ avec $a\neq 0$

• Si $a=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x-1}{x^2} = \boxed{-\infty}$.

⑥ $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+x)^{\left(\frac{1}{x}\right)}$

Soit $y=(e^x+x)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln y = \ln(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$
$= \frac{1}{x}\ln(e^x+x)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\ln y = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln(e^x+x)$

$= \frac{\infty}{\infty}$ (F.I)

On applique "R.H", et on trouve :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln y = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{[\ln(e^x+x)]'}{x'}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+1}{e^x+x} = \frac{\infty}{\infty}$ (F.I)

"On applique "R.H" la deuxième fois"

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1} = 1$.

d'où $\lim y = e^1$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+x)^{\frac{1}{x}} = \boxed{e}$.

⑦ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+3\sin(x)) = ?$

On a : $\forall x\in\mathbb{R}$:

$(\times 3)$ $-1 \leq \sin(x) \leq 1$

$\Rightarrow -3 \leq 3\sin(x) \leq 3$.

$(+x)$ $x-3 \leq x+3\sin(x) \leq 3+x$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-3) = +\infty$

D'après le théorème de comparaison

$\boxed{\text{Si } f(x)\leq g(x) \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \quad \forall x\geq A / A\in\mathbb{R}.}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+3\sin(x)) = \boxed{+\infty}$.

⑧ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)-\sin(x)}{\sin(x)\,(\cos(2x)-\cos(x))} = \dfrac{0}{0}$ (F.I)

Rappel

- $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$
- $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1.$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)-\sin(x)}{\sin(x)\,(\cos(2x)-\cos(x))} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)} - \sin(x)}{\sin(x)\,(2\cos^2(x)-1-\cos(x))}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{\sin(x)-\sin(x)\cos(x)}{\cos(x)}}{\sin(x)\,(2\cos^2(x)-1-\cos(x))}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cancel{\sin(x)}\,[1-\cos(x)]}{\cos(x)\,\cancel{\sin(x)}\,[2\cos^2(x)-1-\cos x]}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{\cos(x)\,(2\cos^2 x-\cos x-1)}$ (*)

Utilisons le changement de variable en posant $U=\cos x$, tout en remarquant que quand $\cos x\to 0$, $U\to 1$.

Ce changement de variable permet la réécriture de (*) comme suit :

(*) $= \lim\limits_{U\to 1} \dfrac{1-U}{U\,(2U^2-U-1)}$

polynôme du second degré.

On détermine la forme factorisée.

$\Delta = 1-4(2)(-1) = 1+8 = 9.$

donc l'équation $2U^2-U-1=0$ admet deux racines $x_1 = \dfrac{-(-1)-\sqrt9}{2\times2} = -\dfrac12$

et $x_2 = \dfrac{-(-1)+\sqrt9}{2\times 2} = 1$

d'où (*) $= \lim\limits_{U\to 1} \dfrac{-(-1+U)}{2U\,(U+\frac12)\,\cancel{(U-1)}}$

$= \lim\limits_{U\to 1} \dfrac{-1}{2U\,(U+\frac12)}$

$= \dfrac{-1}{2\,(1+\frac12)} = \boxed{\dfrac{-1}{3}}.$

⑨ $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+2|x|}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+2(-x)}{x}$

$= \lim\limits_{x\to -\infty} \left[\dfrac{x^2}{x} - \dfrac{2\cancel{x}}{\cancel{x}}\right]$ $\left[\begin{array}{l} x\to-\infty \Rightarrow \\ |x| = -x \end{array}\right].$

$= \lim\limits_{x\to -\infty} (x-2)$

$= \boxed{-\infty}$

⑩ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)-1} = \dfrac{0}{0}$ (F.I)

On utilise "règle de l'Hôpital"

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)-1} =$

$= \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{(1-\sin(x)+\cos(x))'}{(\sin(x)+\cos(x)-1)'}$

$= \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{-\overset{0}{\cos(x)}-\overset{1}{\sin(x)}}{\underset{0}{\cos(x)}-\underset{1}{\sin(x)}}$

$= \boxed{1}.$

⑪ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = 0\cdot\infty$ (F.I)

(L.H)

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot \dfrac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$

$= \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot \dfrac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$

D'abord, on calcule

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{x-\frac{\pi}{4}}{\cos(x+\frac{\pi}{4})} =$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{x-\frac{\pi}{4}}{\cos(x+\frac{\pi}{4})} \overset{R.H}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(x-\frac{\pi}{4})'}{(\cos(x+\frac{\pi}{4}))'}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1}{-\sin(x+\frac{\pi}{4})}$$

$$= -1.$$

par conséquent, on en déduit que

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (x-\frac{\pi}{4})\tan(x+\frac{\pi}{4}) =$$

$$1\times(-1) = \boxed{-1}.$$

Exercice : 02

① Déterminons l'ensemble de définition des fonctions suivantes

① $f(x) = \frac{x^2-1+\cos x}{x^2+x-2}$

$Df = \{x\in\mathbb{R} \mid x^2+x-2 \neq 0\}$.

Résolvons donc $x^2+x-2=0$ pour identifier les valeur interdites on calcule le discriminant

$\Delta = 1-4(1)(-2) = 9. \Rightarrow$

$x_1 = -2$ et $x_2 = 1$.

On en déduit $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$ ou

$\boxed{D_f =]-\infty,-2[\cup]-2,1[\cup]1,+\infty[.}$

② $g(x) = \text{Arctan}(\sqrt{3+2x-x^2})$

$D_g = \{x\in\mathbb{R} \mid 3+2x-x^2 \geq 0\}$.

On étudie le signe de trinôme $-x^2+2x+3$

$\Delta = 4-4(-1)(3) = 16.$

$x_1 = \frac{-2-4}{-2} = 3$, $x_2 = \frac{-2+4}{-2} = -1$.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-x^2+2x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\boxed{D_g = [-1,3].}$

③ $h(x) = (x^2+x+1)^{\ln(x)}$

$\boxed{D_h =]0,+\infty[}$ car ($\forall x\in\mathbb{R} : x^2+x+1>0$)

④ $K(x) = \cos[x\sqrt{\ln x}+1)]$.

$D_K = \{x\in\mathbb{R} \mid x>0$ et $\ln x \geq 0\}$.

- $x>0 \Rightarrow x\in]0,+\infty[$
- $\ln x \geq 0 \Rightarrow x\geq 1 \Rightarrow x\in[1,+\infty[$

$\Rightarrow D_K = (]0,+\infty[)\cap([1,+\infty[)$

$\boxed{D_K = [1,+\infty[}$

② Montrons la continuité des fonctions sur leur ensemble de définition :

① $f(x) = \frac{x^2-1+\cos x}{x^2+x-2}$

La fonction polynomiale $x\mapsto x^2-1$ et la fonction $x\mapsto\cos(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur D_f.

D'autre part la fonction polynomiale $x\mapsto x^2+x-2$ est continue et ne s'annule pas sur D_f. Donc par somme puis quotient f est continue sur D_f.

② $g(x) = \text{Arctan}\left(\sqrt{3+2x-x^2}\right)$.

- $x \longmapsto 3+2x-x^2$ est continue sur D_g (car polynomiale), et à valeur dans $\mathbb{R}_+$.
- $y \longmapsto \sqrt{y}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
- $z \longmapsto \text{Arctan}(z)$ est continue sur $\mathbb{R}$

Donc par composée, g est continue sur D_g.

③ $h(x) = (x^2+x+1)^{\ln(x)}$
$= e^{\ln(x^2+x+1)^{\ln(x)}}$
$= e^{\ln x \ln(x^2+x+1)}$

- $x \longmapsto x^2+x+1$ est continue sur D_h (polynomiale) et à valeurs dans $]0,+\infty[$.
- $x \longmapsto \ln(x)$ est continue sur $]0,+\infty[$.

donc par composée : $x \longmapsto \ln(x^2+x+1)$ est continue sur D_h ;
par produit $x \longmapsto \ln x \ln(x^2+x+1)$ est continue sur D_h à valeurs dans $\mathbb{R}$. et puisque $x \mapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc par composée h est continue sur D_h.

④ $K(x) = \cos\left[x \cdot (\sqrt{\ln x}+1)\right]$.

- $x \mapsto \ln x$ est continue sur $]1,+\infty[= D_K$
- $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0,+\infty[$

donc par composée $x \mapsto \sqrt{\ln x}$ est continue sur D_K $\Rightarrow$ $x \mapsto \sqrt{\ln x}+1$ est continue sur D_K.

- $x \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Donc par produit $x \mapsto x(\sqrt{\ln x}+1)$ est continue sur D_K.

Or $x \longmapsto \cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$,

Ensuite par composée $x \longmapsto \cos(x\sqrt{\ln x}+1)$ est continue sur D_K.

Exercice : 03

Montrons que les fonctions suivantes sont continues sur $\mathbb{R}$:

① $f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } x \leq 0 \\ e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

On a : $x \longmapsto 1+x$ est continue sur $\mathbb{R}$ (polynomiale), en particulier sur $]-\infty, 0[$.

- $x \longmapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $]0,+\infty[$.

- Continuité en 0 :

- $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} (1+x) = 1$.
- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^x = 1$

Et comme $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 1$

Il résulte que f est continue sur $\mathbb{R}$

② $g(x) = \begin{cases} \dfrac{2(1-\cos(x))}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

- La continuité sur $\mathbb{R}^*$

$x \longmapsto \dfrac{2(1-\cos(x))}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$

- La continuité en 0 ?

$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \dfrac{2(1-\cos(x))}{x^2} = \dfrac{2}{2} = 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} g(x) = g(0) = 1$.

par conséquent g est continue en $\overset{=}{0}$.

On en déduit que g est continue sur $\mathbb{R}$

(3) $h(x) = \begin{cases} -\operatorname{Arctan}(\ln(1-x)) & \text{si } x<1 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x=1 \\ \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x-1}\right) & \text{si } x>1 \end{cases}$

• $x \longmapsto \underbrace{-\operatorname{Arctan}(\ln(\overset{g_1}{1-x}))}_{f_1}$ est continue sur $\underbrace{]-\infty, 1[}_{I_1}$ car

- • $x \longmapsto \ln(1-x)$ est continue sur I_1
  - • $x \mapsto 1-x$ est continue sur I_1 (polynome)
  - • $x \mapsto 1-x$ est strictement positive sur I_1 ;
- • f_1 est continue sur $\mathbb{R}$.
- • $g_1(]-\infty, 1[) =]\lim\limits_{x\to 1} f(x), \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)[$

  $g_2 =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

• $x \longmapsto \operatorname{Arctan}\left(\overset{g_2}{\frac{1}{x-1}}\right)$ est continue sur $]1,+\infty[$ car

- • $x \longmapsto \frac{1}{x-1}$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, en particulier est continue sur $]1,+\infty[$ (comme fonction rationnelle).
- • ~~Arctan~~ $x \longmapsto \operatorname{Arctan} x$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- • $g_2(]1,+\infty[) =]\lim\limits_{x\to+\infty} g_2(x), \lim\limits_{x\to 1} g_2(x)[$

  $=]0,+\infty[\subset \mathbb{R}$

$\Rightarrow h$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Etude la continuité en $\overset{=}{1}$

• $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (-\operatorname{Arctan}(\ln(1-x)))$

$= \frac{\pi}{2}$

• $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x-1}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$.

et $h(1) = \frac{\pi}{2}$.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} h(x) = h(1) = \frac{\pi}{2}$.

$\Rightarrow h$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(4) $k(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x\le 0 \\ \exp\left(\frac{1}{x(x-1)}\right) & \text{si } 0<x<1 \\ \ln(x^2+x-1) & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$

• $x \longmapsto \sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

en particulier est continue sur $]-\infty, 0]$.

• $\exp\left(\overset{g_1}{\frac{1}{x(x-1)}}\right)$ est continue sur $]0,1[$

Car

- • $x \mapsto \frac{1}{x(x-1)}$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, en particulier est continue sur $]0,1[$ (car fonction rationnelle)
- • $x \mapsto \exp(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- • $g_1(]0,1[) = ?$

$g_1(x) = \frac{1}{x(x-1)} \Rightarrow g_1'(x) = \frac{-2x+1}{x^2(x-1)^2}$

$g_1'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$g_1'(x) > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$g_1'(x)$		$+$	0	$-$	
$g_1(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty$

$\Rightarrow g_1(]0,1[) =]-\infty, -4[\subset \mathbb{R}$.

• $x \longmapsto \ln(x^2+x-1)$ est continue sur $[1,+\infty[$ car

- • $x \longmapsto x^2+x-1$ est continue sur $\mathbb{R}$ (polynomaile), en particulier elle est continue sur $[1,+\infty[$.
- • $x \longmapsto x^2+x-1$ est strictement positive sur $[1,+\infty[$.

Il reste à étudier la continuité en $\overset{=}{0}$ et $\overset{=}{1}$.

$\left\{\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x \to 0^-} K(x) = \lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0 = f(0). \\ \bullet \lim\limits_{x \to 0^+} K(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \exp\left(\frac{1}{\underbrace{x(x-1)}_{\to 0^-}}\right) \end{array}\right.$

$= 0$

$\Rightarrow f$ est continue en 0

$\left\{\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x \to 1^-} K(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \exp\left(\frac{1}{x(x-1)}\right) = 0 \\ \bullet \lim\limits_{x \to 1^+} K(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \ln(x^2 + x - 1) \end{array}\right.$

$= 0 = f(1)$.

$\Rightarrow f$ est continue en 1.

Par conséquent, on en déduit que K est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°4

· Montrons que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $I = ?$

On sait que :

· Si f est continue et strictement monotone sur I, alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

· Si f réalise une bijection de I sur $f(I)$, alors f admet une fonction réciproque, noté f^{-1} définie sur $f(I)$.

On a : $x \longmapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car :

$\left\{\begin{array}{l} \bullet\ x \longmapsto e^x \text{ est continue sur } \mathbb{R} \\ \bullet\ x \longmapsto -x \text{ est continue sur } \mathbb{R} \end{array}\right.$

$\Downarrow$ par composée $x \longmapsto e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

· $x \longmapsto e^x - e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (par différence).

· $x \longmapsto e^x + e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (par somme).

· $\forall x \in \mathbb{R}$ $e^x + e^{-x} \neq 0$.

$\Rightarrow$ $x \longmapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{\underbrace{e^x + e^{-x}}_{\neq 0}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (par quotient).

· f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$; et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)'$$

$$= \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0.$$

· Puisque f est continue et strictement croissante, donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$.

$f(\mathbb{R}) = \left]\lim\limits_{x \to -\infty} f(x), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right[$
$=]-1, 1[$.

Par la suite f admet une fonction réciproque f^{-1} définie et continue sur $f(\mathbb{R}) =]-1, 1[$.

On a : $\left\{\begin{array}{l} f^{-1}(x) = y \\ x \in]-1, 1[\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f(y) = x \\ y \in \mathbb{R} \end{array}\right.$

$f(y) = x \Leftrightarrow \dfrac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = x$.

$\Leftrightarrow x(e^y + e^{-y}) = e^y - e^{-y}$

$\Leftrightarrow x\left(e^y + \frac{1}{e^y}\right) = \left(e^y - \frac{1}{e^y}\right)$

$\Leftrightarrow x(e^{2y} + 1) = e^{2y} - 1$.

$f(y) = x \Leftrightarrow e^{2y}(x-1)+1+x=0$

$\Leftrightarrow e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Finalement $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, $\forall x \in]-1,1[$.

Exercice 05

ⓐ $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

$D_f = \mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

On étudie donc l'éventuel prolongement par continuité de f en "0".

On a $\forall y \in \mathbb{R} : |\sin(y)| \leq 1$

donc $\forall x \in \mathbb{R}^* : |\sin(\frac{1}{x})| \leq 1$.

$\times|x| \Rightarrow |f(x)| \leq |x|$.

par encadrement, on en déduit que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, Donc f se prolonge par continuité en "0".

soit $\hat{f}$ ce prolongement :

$$\hat{f} = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

ⓑ $g(x) = \frac{x^2+4x+3}{x^2+2x-3}$

$D_g = \mathbb{R}\setminus\{-3,1\}$.

• On étudie l'éventuel prolongement par continuité de g en "-3" et en "1"

. Etude en "-3" :

On a : $x^2+4x+3 = (x+3)(x+1)$ donc

$\forall x \in D, g(x) = \frac{\cancel{(x+3)}(x+1)}{\cancel{(x+3)}(x-1)} = \frac{x+1}{x-1}$

d'où $\lim_{x\to -3} g(x) = \frac{1}{2}$, donc g est prolongeable par continuité en "-3"

. Etude en "1"

$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x+3)}(x+1)}{\cancel{(x+3)}(x-1)}$

$= +\infty$.

donc g n'est pas continue en "1", Alors n'est pas prolongeable par continuité en "1".

ⓒ $h(x) = x^{\frac{x}{x-1}}$.

$D_h =]0,1[\cup]1,+\infty[$.

Etude l'éventuel prolongement par continuité de h en "0" et "1"

• en "0"

$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{\overbrace{\frac{x}{x-1}}^{\to -1}\ln x} = 1$.

$\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1} e^{\overbrace{\frac{\ln x}{x-1}}^{1}\cdot x} = e$.

donc h est prolongeable par continuité en "0" et en "1" et elle s'écrit

$$\hat{h} = \begin{cases} h(x) & \text{si } x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\\ 1 & \text{si } x = 0 \\ e & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

③ $K(x) = (1-x^2)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

$D_K = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \frac{1+x}{1-x} > 0\}$.

Tableau de signe :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$
$1-x$	$+$		$+$ 0	$-$
$\frac{1+x}{1-x}$	$-$		$+$	$-$

$\Rightarrow D_K =]-1, 1[$.

On détermine l'éventuel prolongement par continuité en "-1" et en "1".

• $\lim\limits_{x\to -1^+} K(x) =$

$= \lim\limits_{x\to -1^+} (1-x^2)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to -1^+} (1-x^2)\left[\ln(1+x) - \ln(1-x)\right]$.

$= \lim\limits_{x\to -1^+} \left[(1-x^2)\ln(1+x) - (1-x^2)\ln(1-x)\right]$.

$= \lim\limits_{x\to -1^+} \left[\underbrace{(1-x)}_{\to 2}\underbrace{(1+x)\ln(1+x)}_{\to 0} - \underbrace{(1-x^2)}_{\to 0}\underbrace{\ln(1-x)}_{\to \ln 2}\right]$

$\boxed{\lim\limits_{U\to 0^+} U\ln U = 0}$

$= 0 - 0 = \boxed{0}$.

• $\lim\limits_{x\to 1^-} K(x) =$

$= \lim\limits_{x\to 1} \left[\underbrace{(1-x)}_{0}\underbrace{(1+x)}_{2}\underbrace{\ln(1+x)}_{\ln 2} - \underbrace{(1+x)}_{2}\underbrace{(1-x)\ln(1-x)}_{\to 0}\right]$

$\boxed{\lim\limits_{U\to 0^+} U\ln U = 0}$

$= \boxed{0}$

Exercice "06"

① $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x)}{x-\ln(x)} & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

$D_f = [0, +\infty[$.

On a : $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Et $x \mapsto x - \ln(x)$ est dérivable et ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$.

Donc f est dérivable sur $]0, +\infty[$ (comme quotient de deux fonction dérivable).

• La dérivabilité en "0" :

f est dérivable en un point x_0

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l \in \mathbb{R}$.

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-0} =$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{\ln x}{x-\ln x}+1}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x + x - \ln x}{x(x-\ln x)}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x-\ln x}$

$= \boxed{0}$.

$\Rightarrow$ f est dérivable à droite en "0" et $f'(0) = 0$.

$f'(x) = \begin{cases} \left(\frac{\ln x}{x-\ln x}\right)' & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$= \begin{cases} \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

② $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 e^{-x}}{1-e^{-2x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

sur $\mathbb{R}^*$: • $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$x \mapsto x$ et $x \mapsto 2x$ sont dérivable sur $\mathbb{R}^*$, donc par composition $x \mapsto e^{-x}$ et $x \mapsto e^{-2x}$ ~~sont~~ sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$, De plus $x \mapsto 1$ (constante) et $x \mapsto x^2$ sont dérivable sur $\mathbb{R}^*$, alors respectivement par produit et par somme, les fonctions $x \mapsto x^2 e^{-x}$ et $x \mapsto 1-e^{-2x}$ sont dérivables ~~sur~~ sur $\mathbb{R}^*$, Pour tout $x \neq 0$ on a $1-e^{-2x} \neq 0$, donc par quotient g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

• Étude en "0" :

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 e^{-x}}{x(1-e^{-2x})}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x e^{-x}}{1-e^{-2x}} \overset{R.H}{=} \dfrac{1}{2}$.

Donc $g'(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{x^2 e^{-x}}{1-e^{-2x}}\right)' & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$= \begin{cases} \dfrac{e^{-x}(2x-x^2)(1-e^{-2x}) - 2x^2 e^{-x} e^{-2x}}{(1-e^{-2x})^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$

③ $h(x) = \sin\sqrt{x} - \sqrt{x}$

$D_h = [0, +\infty[= \mathbb{R}_+$.

• On a : • $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$
• $y \mapsto \sin y$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $\mathbb{R}_+$, donc par composition $x \mapsto \sin\sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue sur $\mathbb{R}_+$

Etude la dérivabilité en "0" ?

Corollaire

Soit f une fonction continue sur I, et dérivable sur $I \setminus \{a\}$.
Si f' admet une limite finie en a alors f est dérivable en a et

$f'(a) = \lim\limits_{x\to a} f'(x)$.

On a h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$
donc $h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(\cos(\sqrt{x})-1)$.

$\Rightarrow h'(0) = \lim\limits_{x\to 0} h'(x)$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(\cos(\sqrt{x})-1)$.

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1\sqrt{x}(\cos(\sqrt{x})-1)}{2(\sqrt{x})^2}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\overset{0}{\sqrt{x}}}{2} \cdot \left(\dfrac{\cos\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x})^2}\right)^{\to -\frac{1}{2}}$

$= 0$.

d'où : $h'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(\cos\sqrt{x}-1) & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$