EX:03 - 1. changes la variable $t = 1 + x^2 \Rightarrow dt = 2x\,dx$

On a alors $J = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int t^{-1/2}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^{-1/2+1}}{-1/2+1}\right]$

D'où que $\boxed{J = \frac{1\times 2}{2}\sqrt{1+x^2} + C}$

2. $\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$

changes la variable $x \overset{(*)}{=} tg(t) \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos^2(t)}\,dt$

D'où que $\int \frac{dx}{1+x^2} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} \cdot \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t + \cos^2 t} = \int dt = t + C$

(car $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$)

D'après l'égalité (*), il vient que : $t = \text{Arctang}(x)$

Donc $\boxed{J = x - \text{Arctang}(x) + C}$ page 6

3. poses $2 + x^2 = t \Rightarrow 2x\,dx = dt$

On a alors $J = \frac{3}{2}\int t^{1/2}\,dt = \boxed{(2+x^2)^{3/2} + C}$

4. $\int \underbrace{\cos x}_{v'} \cdot \underbrace{\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)}_{u}\,dx$ (utilises l'intégration par parties)

$= \underbrace{\sin(x)\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)}_{(*)} - 2\int \sin\left(\frac{1}{2}x\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin(x)\,dx$

$= \sin(x)\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right) - 2\int \sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)\cdot\cos^2\left(\frac{1}{2}x\right)dx = (*) - 2\int\cos^2\left(\frac{1}{2}x\right)dx$

$+ 2\int\cos^4\left(\frac{1}{2}x\right)dx$ (changes la variable $\frac{1}{2}x$ par

$2\int \cos^2(t)\,dt = \frac{2}{2}\int (1+\cos 2t)\,dt = t + \frac{1}{2}\sin(2t) + C$

et $2\int \cos^4(t)\,dt = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)^2\,dt$

$= \frac{1}{2}\int (1+2\cos(2t)+\cos^2(2t))\,dt$

$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{4}t + \frac{1}{16}\sin(4t)$

il en résulte que : $J = \sin(x)\cdot\sin^2\left[\frac{1}{2}x\right] + \left[\frac{3}{8}x + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{16}\sin(2x)\right]\times 2 - 2\left[\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin(x)\right] + C$

$= \boxed{\sin(x)\cdot\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\sin(2x) + C}$

EXO4. 1- On décompose $\frac{x}{(x+1)(2x-1)} = \frac{1/3}{x+1} + \frac{1/3}{2x-1}$

D'où que $J = \frac{1}{3}\ln(x+1) + \frac{1}{3\times 2}\ln(2x-1) + C$

$= \boxed{\frac{1}{3}\ln\left[|x+1|\,|2x-1|^{1/2}\right] + C}$

2- $\frac{1}{1-2x^2} = \frac{1}{(1-\sqrt{2}x)(1+\sqrt{2}x)} = \frac{1/2}{1-\sqrt{2}x} + \frac{1/2}{1+\sqrt{2}x}$

D'où que $J = \frac{-1}{2\sqrt{2}}\ln(1-\sqrt{2}x) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2}x)$

$= \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}x}{1-\sqrt{2}x}}\right) + C}$

3-

$$\begin{array}{l|l} x^5 + x^4 - 8 & x^3 - 4x \\ \hline x^4 + 4x^3 & x^2 + x + 4 \\ 4x^3 + 4x^2 & \\ 4x^2 + 16 & \end{array}$$

page 7

il en résulte que : $\dfrac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} = x^2+x+4+\dfrac{4x+16}{x^2-4}$

$\Rightarrow J = \int (x^2+x+4)\,dx + 4\int \dfrac{x+4}{x^2-4}\,dx$ — (*)

Mais $\dfrac{x+4}{x^2-4} = \dfrac{a}{x-2} + \dfrac{b}{x+2}$ tels que :

$\left.\begin{array}{l} a+b=1 \\ 2a-2b=4 \end{array}\right\}$ par résoudre ce système, on obtient :

$a=\dfrac{3}{2}$ et $b=-\dfrac{1}{2}$

on a alors, $\int \dfrac{x+4}{x^2-4}\,dx = \int \dfrac{3/2}{x-2}\,dx - \dfrac{1}{2}\int \dfrac{dx}{x+2}$

page 8

$= \dfrac{3}{2}\ln|x-2| - \dfrac{1}{2}\ln|x+2|$

En remplaçant dans (*), il vient :

$$\boxed{J = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x + \ln\left[\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2 (x-2)^4\right] + C}$$

4. $\dfrac{x}{x^4-3x^2+2} = \dfrac{x}{(x^2-2)(x^2-1)} = \dfrac{ax+b}{x^2-2} + \dfrac{\alpha x+\beta}{x^2-1}$

par la comparaison, il vient : $\begin{array}{l} a+\alpha=0 \\ -a-2\alpha=1 \end{array}$, $\begin{array}{l} -b-2\beta=0 \\ b+\beta=0 \end{array}$

par résoudre ce système, on obtient : $a=1$, $\alpha=-1$, $\beta=b=0$

Donc : $\dfrac{x}{x^4-3x^2+2} = \dfrac{x}{x^2-2} - \dfrac{x}{x^2-1} \Rightarrow$

$$J = \frac{1}{2}\ln|x^2-2| - \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C = \boxed{\ln\left(\sqrt{\frac{x^2-2}{x^2-1}}\right) + C}$$