Université Batna-2
Faculté de Technologie
Département Génie Industriel

Modélisation et Diagnostic Des systèmes Mécatroniques

Prof Hayet Mouss

Master 2- Electromécanique
Spécialité - Mécatronique

Sommaire

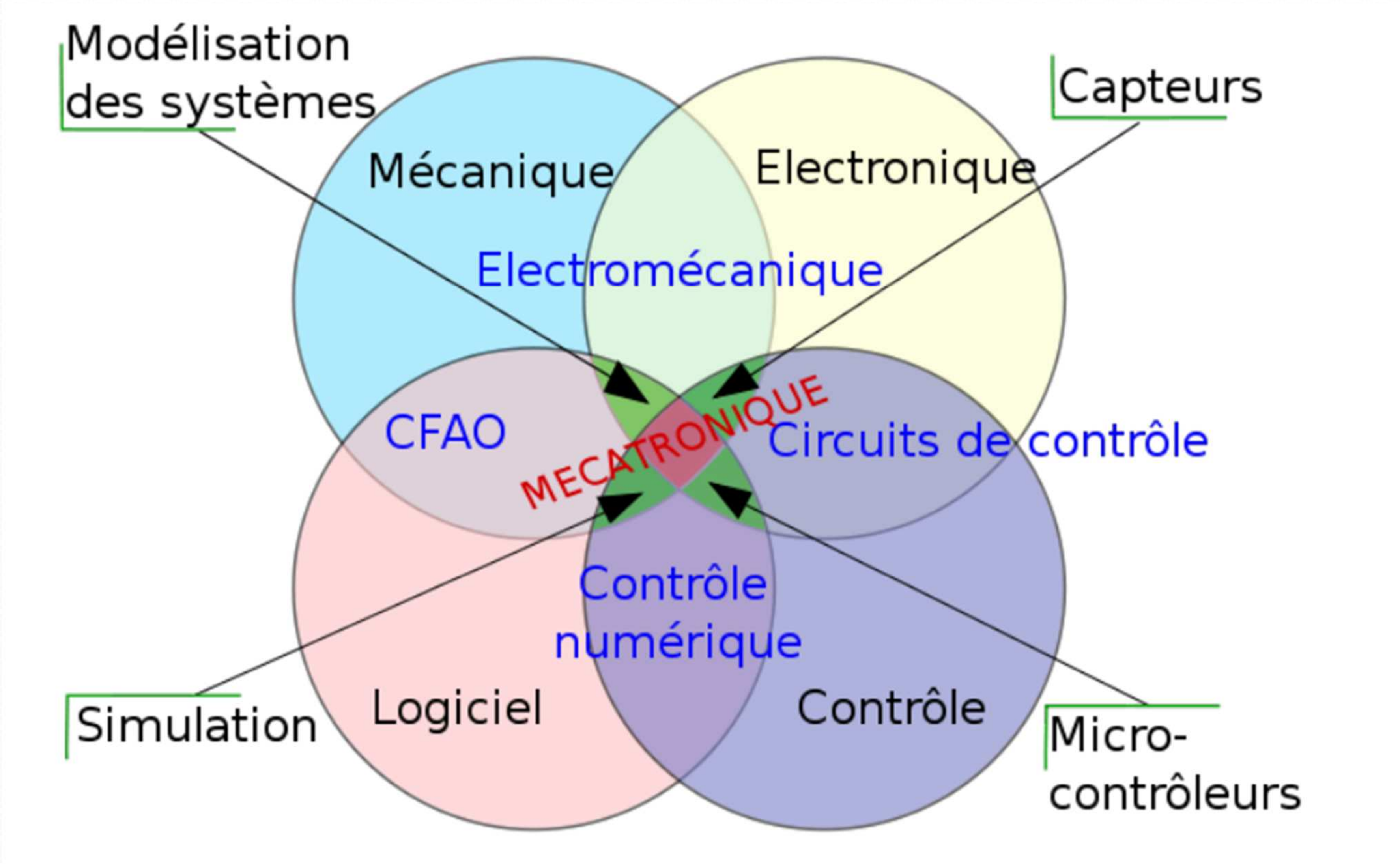
La Mécatronique est une nouvelle technologie alliant la mécanique, l'électronique, l'informatique et les nouvelles technologies de l'information et de la communication (comme internet).

Il s'agit d'une démarche visant l'intégration en synergie de la mécanique, l'électronique, l'automatique et l'informatique dans la conception et la fabrication d'un produit en vue d'augmenter et/ou d'optimiser sa fonctionnalité. (extrait de la norme NF E 01-010)

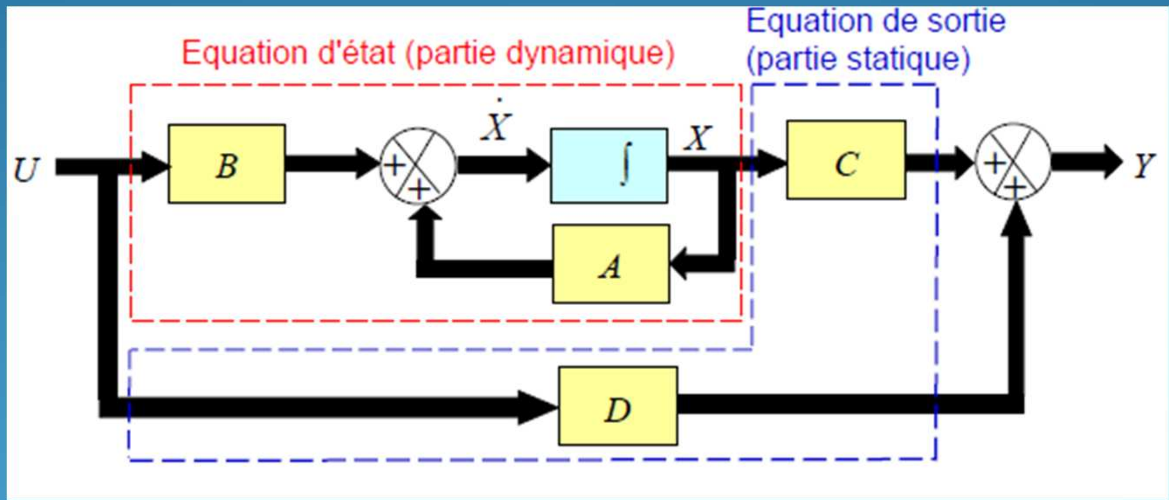
L'alliance de ces différents domaines permet de penser un produit différemment de sa conception jusqu'au recyclage en passant par sa maintenance.

La mécatronique a pour but de créer des composants et solutions de plus en plus intelligents pour répondre aux exigences d'excellence des clients.

Un mécatronicien est en quelque sorte un chef d'orchestre capable de faire travailler ensemble les spécialistes de chaque technologie et d'avoir une vue globale des choses.


Modélisation
des systèmes
Capteurs
Mécanique
Electronique
Electromécanique
CFAO
MECATRONIQUE
Circuits de contrôle
Contrôle
numérique
Simulation
Logiciel
Contrôle
Micro-
contrôleurs

Approches de Modélisation Analytique



Plan du cours

Approches de Modélisation Analytique

I. Espace d'état

II. Fonction de Transfert

I. Espace d'état

1. Introduction à la représentation d'état

2. Représentation et analyse des systèmes dans l'espace d'état

II. Fonction de Transfert

I. Espace d'état

1. Introduction à la représentation d'état

2. Représentation et analyse des systèmes dans l'espace d'état

Objectifs

Assimiler les méthodes d'analyse et de conception des systèmes linéaires basées sur le modèle d'état

Manipuler les techniques de l'algèbre linéaire pour l'analyse et la conception des systèmes

1. Introduction à la représentation d’état

Introduction

L'analyse par variables d'état est une approche moderne d'étude des systèmes née dans les années 60.

La théorie moderne des systèmes fait appel à la notion de **variables d'état. Ces variables** décrivent entièrement le comportement dynamique du système auquel elles correspondent.

Parmi les domaines d'application de cette théorie, l'automatique prend une place privilégiée : la représentation d' état est a l'origine de méthodes puissantes d'analyse et de commande des systèmes facilement adaptable aux calculateurs numériques.

Les équations d'état permettent de représenter **les systèmes linéaires continus, échantillonnés et discrets. Cette représentation est particulièrement bien adaptée à la description des** systèmes (SISO = Single Input Single Output) et MIMO (Multi Input Multi Output).

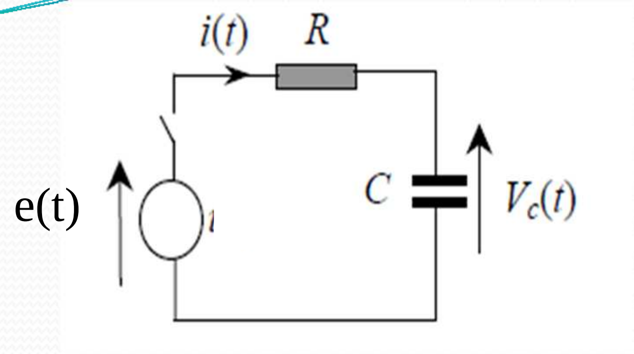
On se restreint, dans le cadre de ce cours, au cas des systèmes linéaires et stationnaires.

L’idée de base de la représentation d’état est que le futur d’un système dépend de son passé de son présent et de ses entrées : le futur peut alors être décrit à partir d’un ensemble de variables bien choisies.

Contrairement à l’analyse classique des systèmes qui fait appel à la représentation de Laplace, dans le cas des représentations d’état, l’analyse a lieu dans le domaine temporel.

De fait, au cadre de l’analyse des fonctions de la variable complexe se substitue le cadre de l’algèbre matricielle.

1.1. Exemple 1: Circuit RC



Entrée : e(t)
Sortie : s(t) = i(t)
Posons $x(t)=v_c(t)$

❑ Modélisation du circuit RC

$$e(t) = Ri(t) + v_c(t)$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C\frac{dv_c(t)}{dt} = C\,\dot{x}(t)$$

$$e(t) = RC\,\dot{x}(t) + x(t)$$

$$comme \quad e(t) = Ri(t) + x(t) \Rightarrow = i(t) - \frac{1}{R}x(t) + \frac{1}{R}e(t)$$

alors

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{RC}x(t) + \frac{1}{RC}e(t)$$

$$i(t) = s(t) = -\frac{1}{R}x(t) + \frac{1}{R}e(t)$$

- Le modèle est de la forme

$$\dot{x}(t) = ax(t) + be(t) \quad (1)$$

(1) est l'équation dynamique du 1er ordre fonction de x(t)

$$s(t) = cx(t) + de(t) \quad (2)$$

(2) relation statique reliant la sortie s(t) et la variable x(t)

Pour établir une relation entre s(t) et e(t), on passe par la variable intermédiaire x(t) (tension aux bornes du condensateur)

Réponse à une entrée échelon

- A l'instant t_0, on ferme l'interrupteur $e(t) = E_0 u(t)$ $t >= t_0$
- Tension initiale aux bornes du condensateur : $x(t_0) = v_c(t_0)$

On a

$$e(t) = RC\,\dot{x}(t) + x(t) \quad (3)$$

1. Résolution de l'équation sans second membre, soit x_s:

$$RC\,\dot{x}_s(t) + x_s(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{x}_s(t)}{x_s(t)} = -\frac{1}{RC} \quad \Rightarrow \quad x_s(t) = ke^{(-1/RC)t}$$

ou k est une constante réelle.

2. Recherche de la solution particulière de l’´equation avec second membre quand e(t) = E0 :

Le second membre est une constante, donc $x_p(t)$ sera une constante

$$x_p(t) = A \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_p(t) = 0$$

En remplaçant dans l’ équation (1), on obtient :

$$RC\,\dot{x}_p(t) + x_p(t) = E_0 \quad \Rightarrow \quad A = E_0 \quad \Rightarrow \quad x_p(t) = E_0$$

La solution générale est la somme de la solution de l’équation sans second membre et de la solution particulière, c’est `a dire :

$$x(t) = x_s(t) + x_p(t)$$

Ainsi

$$x(t) = ke^{(-1/RC)t} + E_0$$

$$si \quad x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -E_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = E_0\left(1 - e^{(-1/RC)t}\right)$$

2. Recherche de la solution particulière de l'´equation avec second membre quand e(t) = E0 :

Le second membre est une constante, donc $x_p(t)$ sera une constante

$$x_p(t) = A \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_p(t) = 0$$

En remplaçant dans l' équation (1), on obtient :

$$RC\,\dot{x}_p(t) + x_p(t) = E_0 \quad \Rightarrow \quad A = E_0 \quad \Rightarrow \quad x_p(t) = E_0$$

La solution générale est la somme de la solution de l'équation sans second membre et de la solution particulière, c'est `a dire :

$$x(t) = x_s(t) + x_p(t)$$

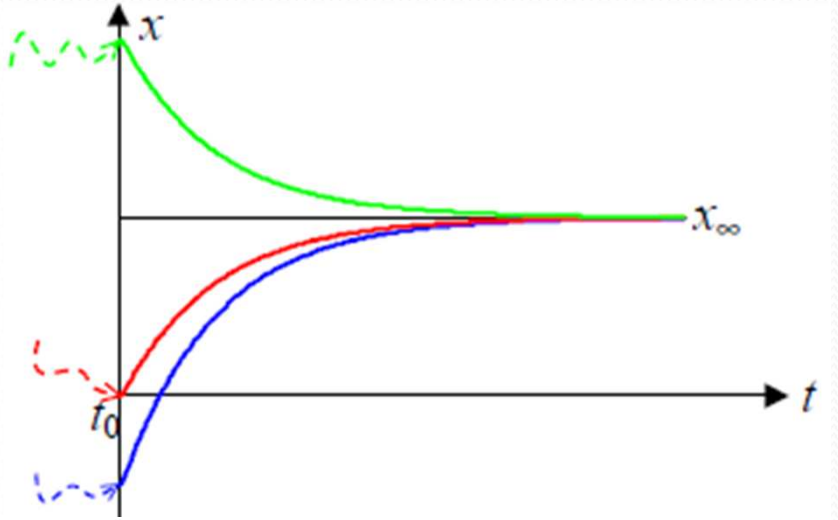
Ainsi

$$x(t) = ke^{(-1/RC)t} + E_0$$

$$si \quad x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -E_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = E_0\left(1 - e^{(-1/RC)t}\right)$$

$$si \quad x(0) = x_0(0) \qquad \Rightarrow \quad k = x_0(0) - E_0$$

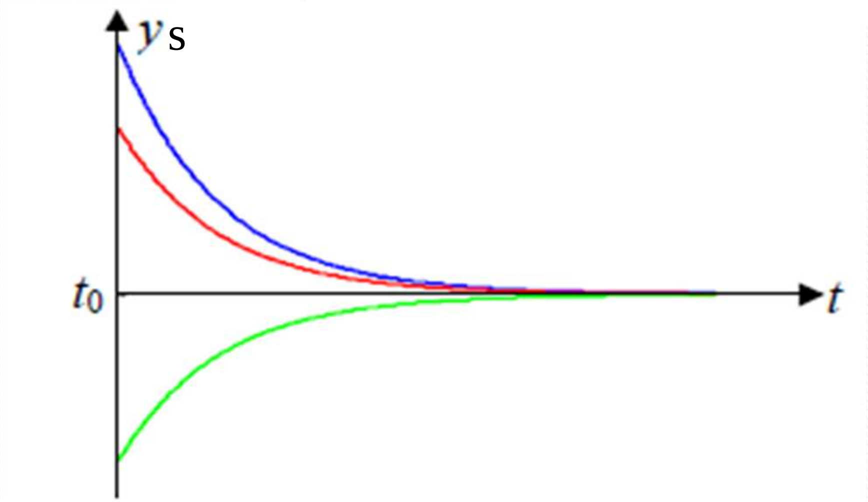
$$x(t) = \left(x_0(0) - E_0\right)e^{(-1/RC)t} + E_0 = e^{(-1/RC)t}x_0(0) + E_0\left(1 - e^{(-1/RC)t}\right)$$



Entre t et t_1

$$x(t) = e^{-\frac{t-t_0}{RC}}x(t_0) + E_0\left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{RC}}\right)$$

$$s(t) = -\frac{1}{R}x(t) + \frac{1}{R}e(t)$$



Remarques

La connaissance de $x(t)$ (et donc de $s(t)$) sur l'intervalle de temps $[t_0, t]$ ne dépend que de la condition initiale $x(t_0)$ et des équations (1) et (2)

La connaissance de x sur l'intervalle de temps $]-\infty, t_0]$ n'est pas nécessaire pour déterminer x sur $[t_0, t]$

Si à l'instant t_1, on applique un nouveau signal d'entrée $e_1(t)$, l'évolution de $x(t)$ et $s(t)$ dans l'intervalle $[t_1, t]$ ne dépendra que de $x(t_1)$ et de $e_1(t)$

Définitions

x(t) est appelé **l'état** du circuit électrique

L'état d'un système à un instant t représente la **mémoire minimale** du passé nécessaire à la détermination du futur

Les équations (1) et (2) définissent entièrement le comportement dynamique du circuit électrique

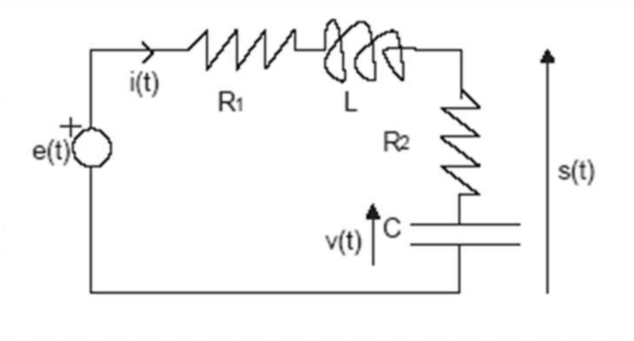
1.2. La notion d'état

On définit l'état d'un système à l'instant t_0 comme l'information sur le passé *nécessaire et* suffisante pour déterminer l'évolution ultérieure du système quand on connaît, pour $t > t_0$, les signaux d'entrée et les équations du système.

Dans ce cas l'information nécessaire et suffisante pour résoudre le système d'équations est liée aux conditions initiales : $i(t_0)$ et $v(t_0)$.

Par conséquent, un ensemble possible de variables d'état est : $[i(t), v(t)]$

Pour illustrer notre propos, considérons l'exemple décrit par les équations différentielles suivantes



$$e(t) = (R_1 + R_2)i(t) + L\frac{di(t)}{dt} + v(t)$$

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

$$s(t) = R_2 i(t) + v(t)$$

Dans ce cas on pose

$$\begin{bmatrix} i(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\frac{di(t)}{dt} = -\frac{(R_1 + R_2)}{L} i(t) - \frac{1}{L} v(t) + \frac{1}{L} e(t)$$

$$i(t) = \frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow \frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{C} i(t)$$

$$\frac{d\dot{x}_1(t)}{dt} = -\frac{R_1 + R_2}{L} x_1(t) - \frac{1}{L} x_2(t) + \frac{1}{L} e(t)$$

$$\frac{d\dot{x}_2(t)}{dt} = \frac{1}{C} x_1(t)$$

Si de plus, l'on suppose que l'on mesure la tension aux bornes de la résistance, l'équation de sortie s' écrit

$$s(t) = R_2 i(t) + v(t) \quad \Rightarrow \quad s(t) = R_2 x_1(t) + x_2(t)$$

Dans ce cas on pose

$$\begin{bmatrix} i(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\dot{x}_1(t)}{dt} = -\frac{R_1+R_2}{L}x_1(t) - \frac{1}{L}x_2(t) + \frac{1}{L}e(t)$$

$$\frac{d\dot{x}_2(t)}{dt} = \frac{1}{C}x_1(t)$$

Si de plus, l'on suppose que l'on mesure la tension aux bornes de la résistance, l'équation de sortie s' écrit

$$s(t) = R_2 x_1(t) + x_2(t)$$

Ainsi

$$\frac{dX(t)}{dt} = \overbrace{\begin{bmatrix} -\dfrac{R_1+R_2}{L} & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}}^{A(t)} X(t) + \overbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}}^{B(t)} e(t)$$

$$S(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} R_2 & 1 \end{bmatrix}}^{C(t)} X(t) + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}^{D(t)} e(t)$$

Remarques

On remarque que les variables d'état constituent les supports des "souvenirs" du système.

Plus généralement, les variables d'état dans les systèmes physiques sont les éléments aptes à emmagasiner de l'énergie sous forme cinétique ou potentielle : inductances, capacités, masses, ressorts.

Il s'agit d'éléments ayant une capacité de "mémoire".

Le vecteur d’état n’est pas unique : il y a même une infinité de choix possibles (sur notre exemple, $[i(t), di/dt]^t$ est un autre vecteur d’état possible)

On passe d’un vecteur d’état à un autre par simple changement de base.

Les variables d’état sont généralement choisies pour leur signification physique et/ou leur simplicité dans les équations d’évolution qui leur sont associées.

1.3. Représentation d'état d'un système

Reprenons notre exemple, le système d’équations peut s’écrire sous la forme matricielle suivante

$$\frac{dX(t)}{dt} = \overbrace{\begin{bmatrix} -\dfrac{R_1+R_2}{L} & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}}^{A(t)} X(t) + \overbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}}^{B(t)} e(t)$$

avec $X(t) = [i(t) \quad v(t)]^t$

$$S(t) = \overbrace{[R_2 \quad 1]}^{C(t)} X(t) + \overbrace{[0]}^{D(t)} e(t)$$

Reprenons notre exemple,

Dans ce cas on pose

$$\begin{bmatrix} v(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$e(t)=(R_1+R_2)i(t)+L\frac{di(t)}{dt}+v(t)$$

$$i(t)=C\frac{dv(t)}{dt}$$

$$s(t)=R_2 i(t)+v(t)$$

$$i(t)=C\frac{dv(t)}{dt}\Rightarrow\frac{dv(t)}{dt}=\frac{1}{C}i(t)\quad\Rightarrow\quad\dot{x}_1(t)=\frac{1}{C}x_2(t)$$

$$\frac{di(t)}{dt}=-\frac{(R_1+R_2)}{L}i(t)-\frac{1}{L}v(t)+\frac{1}{L}e(t)\Rightarrow\dot{x}_2(t)=-\frac{1}{L}x_1(t)-\frac{(R_1+R_2)}{L}x_2(t)+\frac{1}{L}e(t)$$

$$s(t)=x_1(t)+R_2x_2(t)$$

et

$$\frac{dX(t)}{dt}=\overbrace{\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{C}\\ -\frac{1}{L} & -\frac{R_1+R_2}{L}\end{bmatrix}}^{A(t)}X(t)+\overbrace{\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{L}\end{bmatrix}}^{B(t)}e(t)$$

$$S(t)=\overbrace{\begin{bmatrix}1 & R_2\end{bmatrix}}^{C(t)}X(t)+\overbrace{\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}}^{D(t)}e(t)$$

D’une manière générale, à tout système linéaire, causal et continu peuvent être associées les équations matricielles suivantes :

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t)X(t) + B(t)e(t)$$ Équation d’état ou équation de commande

$$S(t) = C(t)X(t) + D(t)e(t)$$ Équation de sortie ou équation d'observation

La représentation d’état n’est pas unique pour un même système physique

le système (A, B, C, D) est dit Linéaire Temps-Invariant(LTI)

Dans le cas d’un système stationnaire, les matrices A,B,C et D sont indépendantes du temps. Ce cas seul sera examiné par la suite.

1.3.1. Généralisation à un système multi entrées, multi sorties

Variables

- X(t) est appelé vecteur d'état du système. $X(t) \in R^n \quad avec\ n\ nombre\ d'etat$

$$X(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad \dots \quad \dots \quad x_n(t)]^T$$

- e(t) est appelée vecteur d'entrée du système. $e(t) \in R^m \quad avec\ m\ nombre\ d'entrees$

$$e(t) = [e_1(t) \quad e_2(t) \quad \dots \quad \dots \quad e_m(t)]^T$$

- s(t) est appelée vecteur de sortie du système. $S(t) \in R^p \quad avec\ p\ nombre\ de \quad sorties$

$$s(t) = [s_1(t) \quad s_2(t) \quad \dots \quad \dots \quad s_p(t)]^T$$

Matrices de la représentation d'état.

- A Matrice d'état. $A \in R^{n \times n} \quad matrice\ caree$
- B Matrice d'entrée $B \in R^{n \times m} \quad matrice\ caree$
- A Matrice de sortie. $C \in R^{p \times n}$
- D Matrice de couplage $D \in R^{p \times m} \quad souvent \quad D = 0$

❑ Remarques.

l'équation d'état est une équation dynamique d'ordre 1

l'équation de sortie est une équation statique linéaire reliant les sorties aux entrées et aux états

Toute la dynamique interne du système est résumée dans l'équation d'état, notamment dans la matrice A. En effet, si e=0, on a le système libre caractérisé par.

$$\dot{X}(t) = AX(t)$$

Les valeurs propres de A sont les pôles du système

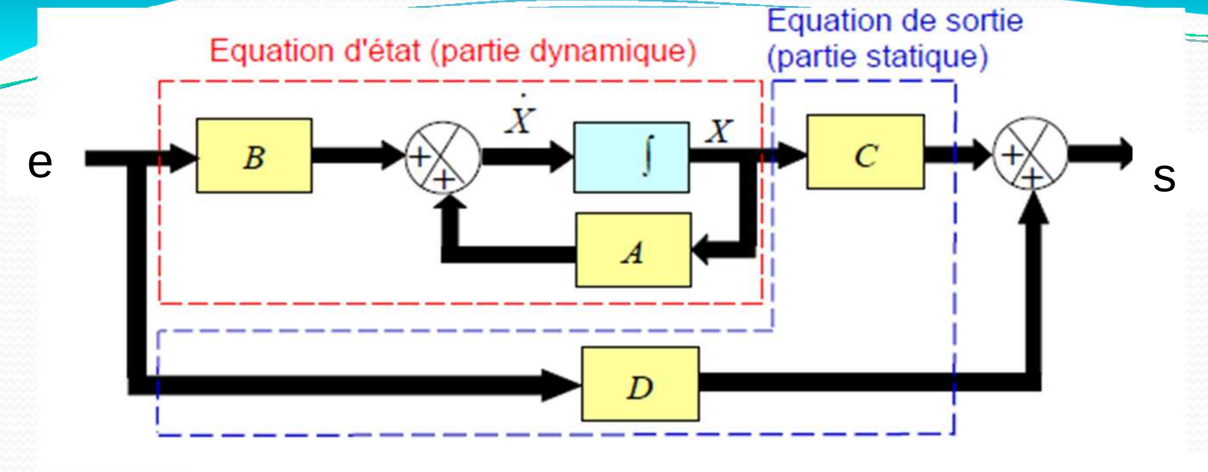
1.3.2.Définition

Un vecteur d'état est un ensemble minimal de variables d'état, c'est-à-dire de grandeurs temporelles, nécessaires et suffisantes pour déterminer l'évolution future d'un système quand on connaît les équations qui décrivent le fonctionnement du système et les entrées de ce système

Le nombre n de composantes correspond au degré de complexité du système. Il définit l'ordre du système.

$$X(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad \dots \quad \dots \quad x_n(t)]^T$$

1.3.3. Représentation d'état



Equation d'état constitue la vue interne du système

✓A est appelée matrice d'état du système. Elle A représente les interactions dynamiques entre les différents éléments internes du système

✓B est appelée matrice de Commande (entrée). Elle représente l'action des entrées sur l'évolution dynamique du système

✓C est appelée matrice de mesure (Sortie). Elle indique les capteurs permettent d'obtenir les sorties.

✓D est appelée de transfert Direct. Elle indique le couplage direct entre les entrées et les sorties

1.4. Représentations d'état équivalentes

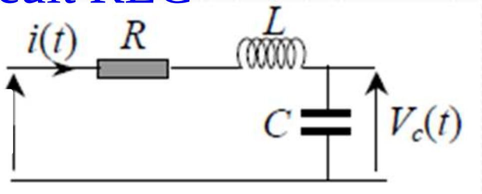
Unicité de la représentation d'état ?

La représentation d'état d'un système est-elle unique ? Non !!

Le modèle d'état obtenu dépend du choix des états. On peut associer à un même système, plusieurs vecteurs d'état conduisant ainsi à différentes représentations d'états équivalentes

- Circuit RLC

e(t)



$$\dot{X}(t) = AX(t) + Be(t)$$
$$s(t) = CX(t) + De(t)$$

En appliquant les lois de l'électricité

$$e(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + v_c(t)$$

$$v_c(t) = \frac{q(t)}{C} \quad Charge, \quad i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

$$\phi(t) = Li(t) \quad Flux$$

Etats : énergie stockée dans le circuit

$x_1(t) = q(t)$: charge du condensateur

$x_2(t) = \varphi(t)$: flux dans l'inductance

$$X(t) = \begin{bmatrix} q(t) \\ \phi(t) \end{bmatrix} \quad Etats\ du\ systeme$$

$$v_c(t) = \frac{1}{C} q(t) = \frac{1}{C} x_1(t)$$

$$\phi(t) = Li(t) \quad \Rightarrow \quad i(t) = \frac{1}{L}\phi(t) = \frac{1}{L} x_2(t)$$

$$i(t) = \dot{q}(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{q}(t) = \frac{1}{L} x_2(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_1(t) = \frac{1}{L} x_2(t)$$

$$e(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + v_c(t) \quad \Rightarrow \quad e(t) = \frac{R}{L} x_2(t) + \dot{x}_2(t) + \frac{1}{C} x_1(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_2(t) = -\frac{1}{C} x_1(t) - \frac{R}{L} x_2(t) + e(t)$$

Le modèle d'état étant

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + Be(t)$$

$$s(t) = CX(t) + De(t)$$

avec

$$X(t) = \begin{bmatrix} q(t) \\ \phi(t) \end{bmatrix}$$

$$s(t) = \begin{bmatrix} v_c(t) \\ i(t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{L} x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{1}{C} x_1(t) - \frac{R}{L} x_2(t) + e(t)$$

$$v_c(t) = \frac{1}{C} x_1(t)$$

$$i(t) = \frac{1}{L} x_2(t)$$

Alors

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad D = [0]$$

Remarque

- Pour avoir les sorties du système à partir des états, il faut disposer de capteurs permettant de mesurer le flux et la charge
- N'ayant pas ces capteurs, changeons de variables d'état

Circuit RLC : autre modèle d'état

Nouveaux états

$$X_T(t) = \begin{bmatrix} v_c(t) \\ i(t) \end{bmatrix}$$

$$v_c(t) = \frac{q(t)}{C}, \quad i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \dot{v}_c(t) = \frac{1}{C} i(t)$$

$$e(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + v_c(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{di(t)}{dt} = -\frac{1}{L} v_c(t) - \frac{R}{L} i(t) + \frac{1}{L} e(t)$$

$$\dot{X}_T(t) = A_T X_T(t) + B_T e(t)$$
$$S(t) = C_T X_T(t) + D_T e(t)$$

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{C} x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -\frac{1}{L} x_1(t) - \frac{R}{L} x_2(t) + \frac{1}{L} e(t)$$

$$v_c(t) = x_1(t)$$
$$i(t) = x_2(t)$$

Alors

$$A_T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \quad B_T = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad C_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D_T = [0]$$

Est-il possible d'établir une relation entre la réalisation (A, B,C,D) et la réalisation (A_T, B_T,C_T,D_T) ?

$$X_T(t)=\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = et \quad X(t)=\begin{bmatrix} q(t) \\ \phi(t) \end{bmatrix} \Rightarrow X(t)=\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix} X_T(t)$$

$$X(t)=TX_T(t) \quad \text{avec} \quad T=\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix}$$

Matrice de transformation T

ou $\quad X_T(t)=T^{-1}X(t) \quad avec \quad T^{-1}=\begin{bmatrix} 1/C & 0 \\ 0 & 1/L \end{bmatrix}$

$$\dot{X}_T(t)=T^{-1}\dot{X}(t) \Rightarrow \dot{X}_T(t)=T^{-1}[AX(t)+Be(t)] \Rightarrow \dot{X}_T(t)=T^{-1}ATX(t)+T^{-1}Be(t)$$

$$X_T(t)=T^{-1}X(t) \Rightarrow S(t)=CX(t)+De(t) \Rightarrow S(t)=CTX_T(t)+De(t)$$

$$\dot{X}_T(t)=T^{-1}ATX(t)+T^{-1}Be(t)=\begin{bmatrix} 1/C & 0 \\ 0 & 1/L \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1/L \\ -1/C & -R/L \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix}X(t)+\begin{bmatrix} 1/C & 0 \\ 0 & 1/L \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}e(t)$$

$$\dot{X}_T(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix}X(t)+\begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix}e(t)$$

On retrouve les mêmes résultats

$$S(t)=\begin{bmatrix} 1/C & 0 \\ 0 & 1/L \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix}X_T(t)+[0]e(t) \Rightarrow S(t)=IX_T(t)$$

Cas général

soit $$\dot{X}(t) = AX(t) + Be(t)$$ $$S(t) = CX(t) + De(t)$$ $X(t) \in R^n$ Une représentation d'état d'un système

- Changement de vecteur d'état

Transformation linéaire $X(t) = TX_T(t)$

T Matrice de transformation $T \in R^{n\times n}$

T est une Matrice carrée d'ordre n régulière

- Représentation d'état équivalente

$$\dot{X}_T(t) = A_T X_T(t) + B_T e(t)$$
$$S(t) = C_T X_T(t) + D_T e(t)$$

alors

$$\dot{X}_T(t) = T^{-1}ATX(t) + T^{-1}Be(t)$$
$$S(t) = CTX_T(t) + De(t)$$

avec

$$A_T = T^{-1}ATX(t), \quad B_T = T^{-1}B$$
$$C_T = CT, \quad D_T = D$$

- Remarque

Les matrices A et A_T sont semblables (A et A_T ont les mêmes valeurs propres)

la dynamique du système est préservée

1.5. Choix des variables d'état

Préliminaires et définitions

✓ L'état d'un système à l'instant t_0 est un n-uplet $X(t_0)$ d'un espace E dont la connaissance associée à celle de l'entrée e(t) dans l'intervalle $[t_0, t]$ permet de connaître la sortie s(t).

✓ E est appelé espace d'état. E est un sous-espace de R^n.

✓ Le nombre minimal d'état correspond à l'ordre du système

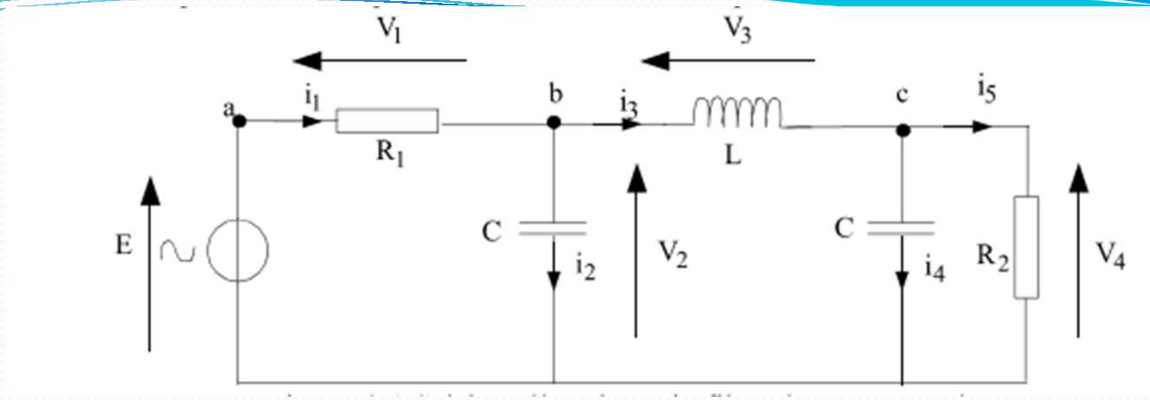
✓ Le concept d'état découle donc d'une suite de grandeurs physiques (courant, vitesse, …) ou non suffisantes pour caractériser le fonctionnement d'un système. Le choix des états est laissé au libre arbitre du concepteur

✓ Par une transformation linéaire, il est possible de passer d'une représentation d'état à une autre équivalente

✓ Un système admet donc une infinité de représentation d'état

✓ Par la transformation linéaire , $X(t) = TX_T(t)$

on peut avoir des variables d'état qui physiquement ne correspondent à rien



Lois des mailles

$$e(t) = v_1(t) + v_2(t) \quad avec \quad v_1(t) = R_1 i_1(t) \quad \Rightarrow e(t) = R_1 i_1(t) + v_2(t)$$

$$v_2(t) = v_3(t) + v_4(t) \quad avec \quad v_3(t) = L\frac{di_3(t)}{dt} \quad \Rightarrow v_2(t) = L\frac{di_3(t)}{dt} + v_4(t) \quad et \quad v_4(t) = R_2 i_5(t)$$

Lois des nœuds

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t) \quad avec \quad i_2(t) = C\frac{dv_2(t)}{dt}$$

$$i_3(t) = i_4(t) + i_5(t) \quad avec \quad i_4(t) = C\frac{dv_4(t)}{dt}$$

Pour établir les équations d'état il faut prendre une variable d'état par élément de stockage.
Nous avons ici deux condensateurs et une inductance. De ce fait, il nous faudra trois variables d'état

- ❑ Première approche

Nous prendrons comme variables d'état les tensions aux bornes des condensateurs et le courant dans l'inductance

$$X^T(t)=[v_2(t)\quad v_4(t)\quad i_3(t)] \Rightarrow [x_1(t)\quad x_2(t)\quad x_3(t)]$$

La grandeur d'entrée sera la tension e(t) et la sortie la tension v_4(t)

$$u(t)=e(t) \quad et$$
$$y(t)=v_4(t)=x_2(t)$$

Avec les notations les équations du circuit deviennent

$$u(t)=R_1 i_1(t)+x_1(t) \quad et \quad x_1(t)=L\frac{di_3(t)}{dt}+v_4(t)=L\dot{x}_3(t)+x_2(t)$$

$$x_2(t)=R_2 i_5(t) \qquad et \quad i_1(t)=C\frac{dv_2(t)}{dt}+i_3(t)=C\dot{x}_1(t)+x_3(t) \quad avec \quad x_3(t)=C\frac{dv_4(t)}{dt}+i_5(t)=C\dot{x}_2(t)+i_5(t)$$

❑ Pour la première composante d'état nous avons

$$x_1(t)=v_2(t) \;\Rightarrow\; \dot{x}_1(t)=\dot{v}_2(t) \;\Rightarrow\; \dot{x}_1(t)=\frac{i_1(t)-x_3(t)}{C}$$

$$or \quad e(t)=R_1 i_1(t)+v_2(t)=R_1 i_1(t)+x_1(t) \;\Rightarrow i_1(t)=\frac{e(t)-x_1(t)}{R_1}$$

$$\dot{x}_1(t)=\frac{e(t)-x_1(t)}{R_1 C}-\frac{x_3(t)}{C}$$

- Pour la seconde composante d'état nous avons

$$x_2(t)=v_4(t) \;\Rightarrow\; \dot{x}_2(t)=\dot{v}_4(t) \;\Rightarrow\; \dot{x}_2(t)=\frac{i_4(t)}{C}=\frac{i_3(t)-i_5(t)}{C}=\frac{x_3(t)-i_5(t)}{C}$$

$$or \quad i_5(t)=\frac{x_2(t)}{R_2} \;\Rightarrow\; \dot{x}_2(t)=\frac{x_3(t)}{C}-\frac{x_2(t)}{R_2C}$$

- Enfin la troisième composante d'état

$$x_3(t)=i_3(t) \;\Rightarrow\; \dot{x}_3(t)=\dot{i}_3(t)$$

$$or \quad \dot{x}_3(t)=\frac{v_3(t)}{L} \quad et \quad v_3(t)=v_2(t)-v_4(t)$$

$$donc \quad \dot{x}_3(t)=\frac{x_1(t)-x_2(t)}{L}$$

La représentation d'état est donc

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{R_1C} & 0 & \frac{1}{C}\\ 0 & -\frac{1}{R_2C} & \frac{1}{C}\\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{R_1C}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}$$

❑ Seconde approcheapproche

Nous prendrons ici l'énergie stockée dans les condensateurs et le flux dans l'inductance comme variables d'état

$$x_1(t) = Q_1(t) = Cv_2(t)$$
$$x_2(t) = Q_1(t) = Cv_4(t)$$
$$x_3(t) = \phi(t) = Li_3(t)$$

$$X^T(t) = [Q_1(t) \quad Q_2(t) \quad \phi(t)] \Rightarrow [x_1(t) \quad x_2(t) \quad x_3(t)]$$

La sortie et la commande restant les mêmes que précédemment

$$u(t) = e(t) \quad et$$
$$y = v_4(t)$$

En dérivant comme précédemment les composantes d'état nous obtenons

$$x_1(t) = Cv_2(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_1(t) = C\dot{v}_2(t) = i_2(t) \quad comme \quad i_2(t) = i_1(t) - i_3(t) = \frac{u(t) - v_2(t)}{R_1} - i_3(t)$$

$$avec \quad v_2(t) = \frac{x_1(t)}{C} \, et \, i_3(t) = \frac{x_3(t)}{L}$$

donc

$$\dot{x}_1(t) = \frac{u(t) - v_2(t)}{R_1} - i_3(t) = \frac{u(t)}{R_1} - \frac{x_3(t)}{L} + \frac{x_1(t)}{R_1 C}$$

$$x_2(t)=Cv_4(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_2(t)=C\,\dot{v}_2(t)=i_4(t) \quad comme \quad i_4(t)=i_3(t)-i_5(t)$$

$$avec \quad i_3(t)=\frac{x_3(t)}{L} \quad et \quad i_3(t)=\frac{v_4(t)}{R_2}=\frac{x_2(t)}{R_2C}$$

Ce qui donne $$\dot{x}_2(t)=-\frac{x_2(t)}{R_2C}+\frac{x_3(t)}{L}$$

$$x_3(t)=Li_3(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_3(t)=L\,\dot{i}_3(t) \quad comme \quad v_3(t)=v_2(t)-v_4(t)$$

$$avec \quad v_2(t)=\frac{x_1(t)}{C} \quad et \quad v_4(t)=\frac{x_2(t)}{C}$$

Nous avons $$\dot{x}_3(t)=\frac{x_1(t)}{C}-\frac{x_2(t)}{C}$$

La représentation d'état est donc

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{R_1C} & 0 & -\frac{1}{L}\\ 0 & -\frac{1}{R_2C} & \frac{1}{L}\\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{R_1}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u(t) \qquad y(t)=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}$$

❑ Quelques éléments pour la sélection des variables d'état

On choisit souvent comme variables d'états, des éléments du système susceptibles d'être des réservoirs d'énergie

Elément	Energie	Etat
Inductance	$\frac{1}{2}Li^2$	i
Condensateur	$\frac{1}{2}CV_c^2$	V_c
Masse m	$\frac{1}{2}mv^2$	$v = dx/dt$
Ressort k	$\frac{1}{2}kx^2$	x

Elément	Energie	Etat
Moment d'inertie J	$\frac{1}{2}m\omega^2$	$\omega = d\theta/dt$ θ
Colonne de fluide de pression p	$\frac{1}{2}(V/\beta)p^2$	p
Colonne de fluide de hauteur h	$\frac{1}{2}\rho A h^2$	h

1.7. L'équation d'état de transition

1.7. 1. Etude préalable

Si on avait affaire a un système décrit par une simple équation différentielle et non par un système différentiel, l'équation d'état se résume

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + be(t) \quad (1)$$

$$s(t) = cx(t)$$

ou, a, b, c, x et s sont des scalaires. Dans un premier temps, on considère ce systeme autonome [e(t) = 0). L'équation d'évolution de x devient :

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t)$$

La TL de cette équation donne

$$pX(p) - x_0 = aX(p) \quad \Rightarrow \quad X(p)(p-a) = x_0 \quad \Rightarrow \quad X(p) = \frac{x_0}{p-a} \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 e^{at}$$

Dans le cas, plus général, du régime force (e 0), l'équation d'évolution dex est

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + be(t)$$

La TL de cette équation donne

$$pX(p) - x_0 = aX(p) + bE(p) \quad \Rightarrow \quad X(p)(p-a) = x_0 + bE(p) \quad \Rightarrow \quad X(p) = \frac{x_0}{p-a} + \frac{bE(p)}{p-a}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = x_0 e^{at} + \int_0^t e^{a(t-\tau)} be(\tau) d\tau$$

Le premier membre de cette équation correspond au régime libre, le deuxième, au régime forcé.

La solution d'une telle équation est connue et a pour expression :

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}be(\tau)d\tau$$

Etat a l'instant t

Regime libre [e(t)=0]

Contribution de e(t)

On reconnaît dans cette expression la somme de la solution de l'équation correspondant au régime libre, soit $e^{at}x(0)$ et de la solution correspondant au régime forcé soit $\int_0^t e^{a(t-\tau)}be(\tau)d\tau$

1.7. 2. Cas général

Dans un premier temps, on considéré le système autonome (e = 0). L' équation d'évolution de l' état X devient :

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t)$$

La TL de cette équation donne :

$$\dot{X}(t) = AX(t) \Rightarrow pX(p) - X(0) = AX(p) \Rightarrow X(p)[Ip - A] = X(0)$$

$$\Rightarrow X(p) = X(0)[Ip - A]^{-1}$$

Par dentition, on appelle la matrice

$$e^{At} = TL^{-1}\left[Ip - A\right]^{-1}$$

la matrice de transition du système. La notation e^{At} rappelle le cas scalaire (e^{at}).
La TL inverse de l'équation précédente est :

$$X(t) = e^{At} X(0)$$

Dans le cas du régime force, l'équation d'évolution de X est :

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + Be(t)$$

La TL inverse de l'équation précédente est :

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Be(t) \Rightarrow pX(p) - X(0) = AX(p) + BE(p)$$

$$X(p) = \left[pI - A\right]^{-1} x_0 + \left[pI - A\right]^{-1} BE(p)$$

$$X(t) = e^{At} X(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Be(\tau) d\tau$$

Le premier membre de cette équation correspond au régime libre, le deuxième, au régime forcé.

Dans cette écriture e^{At} représente une matrice exponentielle que l'on note $\phi(t)$ et que l'on appelle matrice de transition du système

Si on connaît l'état d'un système a un instant t_1 différent de 0, on peut calculer son état a un instant t quelconque

$$x(t) = e^{-A(t-t_1)}x(t_1) + \int_{t_1}^{t} e^{-A(t-\tau)}Be(\tau)d\tau$$

1.7.3. Propriétés de la matrice de transition d'état

L'opération la plus délicate dans la résolution des équations d'état consiste a calculer la matrice de transition

- Utilisation de la Transformée de Laplace

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Be(t) \Rightarrow pX(p) - x_0 = AX(p) + BE(p)$$

$$[pI - A]X(p) = x_0 + BE(p) \quad \longrightarrow \quad X(p) = [pI - A]^{-1}x_0 + [pI - A]^{-1}BE(p)$$

$$\phi(t) = L^{-1}[(pI - A)]^{-1}$$

- Exercice 1

Calcul de la matrice de transition par TL

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(pI-A)^{-1}=\left[\begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}\right]^{-1}=\begin{bmatrix} p & -1 & 0 \\ 0 & p & -1 \\ -1 & 3 & p-3 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{(p-1)^3}\begin{bmatrix} p^2-3p+3 & p-3 & 1 \\ 1 & p^2-3p & p \\ p & 1-3p & p^2 \end{bmatrix}$$

$$e^{At}=L^{-1}\left\{\frac{1}{(p-1)^3}\begin{bmatrix} p^2-3p+3 & p-3 & 1 \\ 1 & p^2-3p & p \\ p & 1-3p & p^2 \end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix} \left(e^t-te^t+\frac{1}{2}t^2e^t\right) & \left(te^t-t^2e^t\right) & \left(\frac{1}{2}t^2e^t\right) \\ \left(\frac{1}{2}t^2e^t\right) & \left(e^t-te^t-t^2e^t\right) & \left(te^t+\frac{1}{2}t^2e^t\right) \\ \left(te^t+\frac{1}{2}t^2e^t\right) & \left(-3te^t-t^2e^t\right) & \left(e^t+2te^t+\frac{1}{2}t^2e^t\right) \end{bmatrix}$$

- Exercice 2

$$A=\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \phi(t)=L^{-1}\left[\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}\right]^{-1}$$

$$\rightarrow \phi(t)=\begin{bmatrix} -2e^{-2t}+3e^{-3t} & -e^{-2t}+e^{-3t} \\ 6e^{-2t}-6e^{-3t} & 3e^{-2t}-2e^{-3t} \end{bmatrix}$$

1. Trouver les modes du modèle d'état et calculer la réponse libre pour les conditions initiales

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \qquad x_1(t) = 10 \quad x_2(0) = 0$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) \qquad x_1(t) = 10 \quad x_2(0) = -10$$

$$x_1(t) = 10 \quad x_2(0) = 10$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow (Ip - A) = \begin{bmatrix} p & -1 \\ 0 & p+1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(Ip - A) = p(p+1)$$

$$\phi(t) = e^{At} = L^{-1}[(pI - A)]^{-1} = L^{-1}\begin{bmatrix} p & -1 \\ 0 & p+1 \end{bmatrix}^{-1} = L^{-1}\frac{1}{p(p+1)}\begin{bmatrix} p+1 & 1 \\ 0 & p \end{bmatrix} = L^{-1}\begin{bmatrix} \frac{1}{p} & \frac{1}{p(p+1)} \\ 0 & \frac{1}{(p+1)} \end{bmatrix}$$

$$\phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \phi(t)x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \phi(t)x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10e^{-t} \\ 10e^{-t} \end{bmatrix}$$

la réponse libre

$$x(t) = \phi(t)x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 - 10e^{-t} \\ 10e^{-t} \end{bmatrix}$$