PROCESSUS STOCHASTIQUE V.A ET LOIS DE PROBABILITÉ

PR. MOHAMED. DJAMEL MOUSS

Laboratoire d'Automatique et Productique LAP

Genie Industriel

PROBABILITE

INTRODUCTION

Le hasard c'est Dieu qui se promène incognito…

Einstein

Ce que nous appelons hasard n'est et ne peut être que la cause ignorée d'un effet connu.

« De façon apparemment paradoxale, l'accumulation d'événements au hasard aboutit à une répartition parfaitement prévisible des résultats possibles. **Le hasard n'est capricieux qu'au coup par coup**. »

M. SERRES et N. FAROUKI

C'est cette **régularité à long terme** qui peut être décrite mathématiquement au travers de la théorie des probabilités.

Les probabilités fournissent une description mathématique de l’incertain c’est-à-dire d’**événements** « **aléatoires** ».

Remarque: en latin, *alea* signifie « coup de dé ».

Un événement est dit « aléatoire » quand l’issue (le résultat) d’une **expérience** (exemple : jeter un dé,…) n’est pas connue par avance c’est-à-dire qu’elle est soumise au *hasard*.

Remarque: Hasard prend ses racines du mot arabe « ZAHR » qui signifie « dé »

La vision fréquentiste repose sur la *loi des grands nombres*, établie pour la première fois par J. Bernoulli en 1713, fournit une définition ‘pratique’ de la notion de probabilité.

Une seule expérience ne suffisant pas pour évaluer la probabilité d'un événement on va répéter un très grand nombre de fois l'expérience.

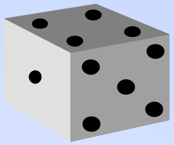
Cette loi stipule que si on répète un grand nombre n de fois une épreuve, la fréquence f avec laquelle on observe la survenue d'un événement tend (quand $n \rightarrow$ infini) vers une limite qui est définie comme probabilité de cet événement.

Du point de vue pratique il est clair que la vision fréquentiste ne permet pas de trouver la probabilité d'un événement puisqu'un tel processus nécessitant une infinité d'observations est physiquement irréalisable.

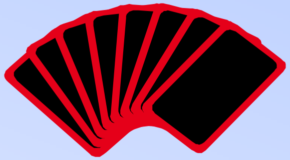
NOTION ELEMENTAIRE

<u>Expérience (ou épreuve)</u> : procédure définie précisément et donnant un résultat (par définition imprévisible).

Jeter un dé



Tirer une carte



Jouer à la roulette

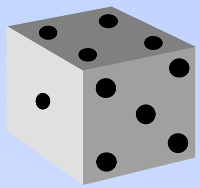
Expérience aléatoire : expérience possédant les caractéristiques suivantes :

L'ensemble (dit fondamental) des résultats (c-a-d toutes les issues possibles) de l'expérience est connu avant l'expérience,

Le résultat de l'expérience n'est connu qu'après la réalisation de l'expérience.

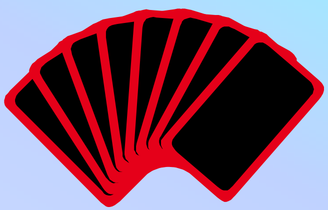
Ensemble fondamental (noté Ω) : ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience.

Expérience :



Jeter un dé

Ω=[1, 2, 3,4, 5, 6]



Tirer une carte

Ω=[1♣ ,1♦ ,1♥ ,1♠

2♣ 2♦ 2♥ 2♠,

…

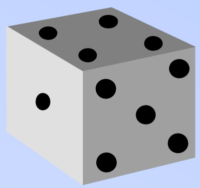
R♣, R♦, R♥, R♠]

Jouer à la roulette

Ω=[00, 0, 1, 2,…34, 35,36]

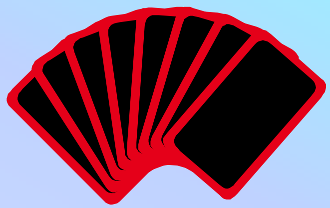
Evénement élémentaire (ou réalisation) : chaque élément (noté ω) d'un ensemble fondamental.

Expérience :



Jeter un dé

Obtenir le « 2 »



Tirer une carte

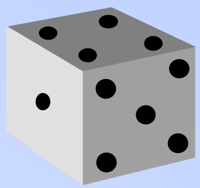
Obtenir le « Roi de Cœur »

Jouer à la roulette

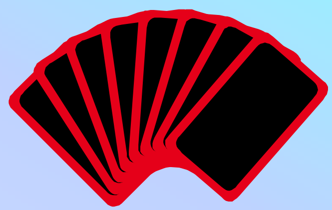
Obtenir le « 2 Noir »

Evénement composé : proposition logique relative au résultat de l’expérience c’est-à-dire une partie E de Ω.

Expérience :



Jeter un dé



Tirer une carte

Jouer à la roulette

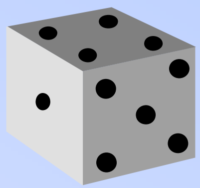
Obtenir « un résultat $\geq$ 4 »

Obtenir une «Carte Cœur »

Obtenir le « Impair et Passe»

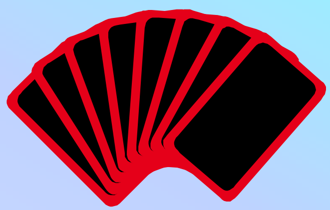
Evénement impossible: que l'on désigne par Φ c'est l'évènement qui ne se réalise jamais.

Expérience :



Jeter un dé

Obtenir « le numéro 8 »



Tirer une carte

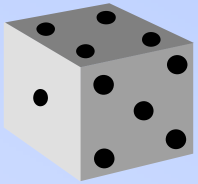
Obtenir le «numéro 15 de trèfle»

Jouer à la roulette

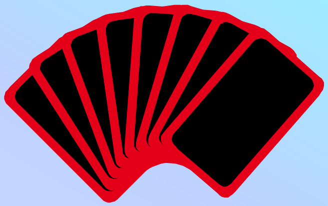
Obtenir le « numéro 50 paire »

Evénement certain : que l'on désigne par Ω c'est l'évènement qui se réalise toujours .

Expérience :



Jeter un dé



Tirer une carte

Jouer à la roulette

Obtenir « un chiffre compris entre 1 et 6»

Obtenir «Carte quelconque»

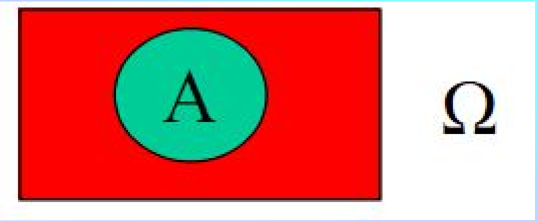
Obtenir le «un chiffre compris entre 00 et 36»

Opérations sur les évènements

Complémentaire de A :

Evénement constitué des résultats élémentaires de Ω qui ne sont pas dans A. Soit ω le résultat de l'expérience :

$$\bar{A} = \{\omega \in \Omega, \omega \notin A\}$$

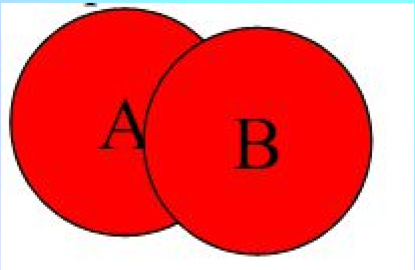


($\bar{A}$ se réalise ssi A ne se réalise pas : non A).

Réunion de A et B:

Evènement constitué des résultats élémentaires de Ω qui appartiennent à A ou à B (ou aux deux). Soit ω le résultat de l'expérience :

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega, \omega \in \mathrm{A}\ ou\ \omega \in \mathrm{B}\}$$

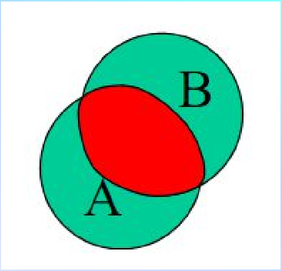


($A \cup B$ se réalise ssi A se réalise ou B se réalise : A ou B).

Intersection de A et B:

Evènement constitué des résultats élémentaires de **Ω** qui appartiennent à la fois à A et à B. Soit ω le résultat de l’expérience

$$\boldsymbol{A \cap B = \{\omega \in \Omega, \omega \in A \text{ } et \text{ } \omega \in B\}}$$

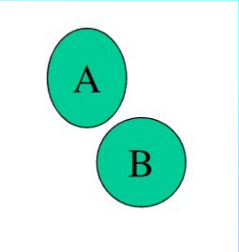


($A \cap B$ se réalise ssi A se réalise et B se réalise : A et B).

Disjonction de A et B:

La disjonction ou l’incompatibilité: A et B sont disjoints si et seulement si A et B n’ont pas d’éléments communs :

$$A \text{ } et \text{ } B \text{ } disjoint \quad \Leftrightarrow \quad (A \cap B = \Phi)$$



(A et B disjoints : A et B sont incompatibles)

Système Complet d’évènement :

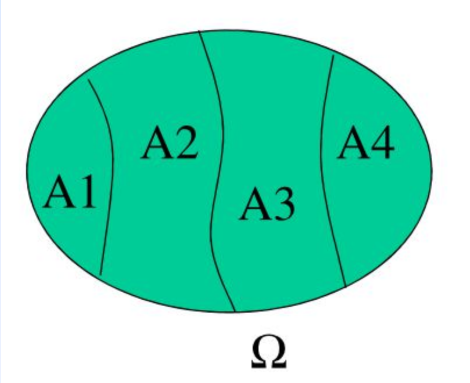
Soient A_1 ,A_2 ... , A_n n évènements. On dit que (A_1 ,A_2 ... , A_n constitue un système complet d'événements si ils forment une partition de Ω

Ils sont deux à deux incompatibles

$$\forall p \neq q \quad A_p \cap A_p = \Phi$$

Si leur réunion est l'événement certain Ω

$$\bigcup_{p=1}^{n} A_p = \Omega$$



Exemple : ($A,\overline{A}$) forme un système complet d’évènements.

RECAPITULATIF

Notation	Vocabulaire Ensembliste	Vocabulaire Probabiliste
Ω	Ensemble plein	Evènement certain
ϕ	Ensemble vide	Evènement impossible
ω	Elément de Ω	Evènement élémentaire
A	Sous ensemble de Ω	Evènement
$\omega \in A$	ω appartient à A	ω réalise A
$A \subset B$	A inclus dans B	A implique B
$A \cup B$	A réunion B	A ou B
$A \cap B$	Intersection de A et B	A et B
A^c ou $\overline{A}$	Complémentaire de A	Evènement contraire de A
$A \cap B = \phi$	A et B disjoints	A et B incompatibles

Types de Probabilités

Probabilité à priori (théorique): **C'est une probabilité déterminée à l'avance sans effectuer aucune expérience**

La probabilité qu'une pièce de monnaie bien équilibré tombe sur pile est 1/2

Probabilité empirique: **C'est une probabilité déterminée à aide d'observation et d'expérimentation. C'est la fréquence relative d'un évènement**

Un professeur de statistique enseigne à 12848 personne et parmi celles-ci 542 ont échoué. La probabilité d'écoué dans le cours donné par ce professeur est 542/12848 = 0.0422

Probabilité subjective : **Cette probabilité intervient lorsqu'il est impossible d'établir la probabilité à priori ou de façon empirique. On dit alors qu'on s'en remet à notre bon(???) jugement**

Evaluer à 0.01 la probabilité qu'il neige demain

DEFINITION GENERALE

Soit Ω un en semble fondamentale et F une famille d'évènement observable sur Ω. On appelle Probabilité sur (Ω,F) toute application P de F dans [0,1] vérifiant :

P(Ω) = 1

Pour toute suite $(A_j)_{j \geq 1}$ d'évènement de F deux à deux disjoint (incompatibles)

$$P\left(\bigcup_{j \in N^*} A_j\right) = \sum_{j=1}^{+\infty} P(A_j)$$

Le triplet (Ω, F,P) s'appelle espace probabilisé

PROPRIETES GENERALES

Toute probabilité P sur (Ω , F) vérifie les propriétés suivantes

$$P(\Phi) = 0$$

$$P(\Omega) = 1$$

$$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(\bar{\mathrm{A}}) = 1 - P(A)$$

$$\forall A \in \mathcal{F}, \forall B \in \mathcal{F} \; si \; A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

Probabilité conditionnelle

Soit deux événements non exclusifs A et B :

- ❖ On regarde la probabilité que l'un se réalise alors que l'autre est déjà réalisé.

On note $P\left({}^{A}/_{B}\right)$ la probabilité de A si B est réalisé

Exemple:

Une entreprise possède 2 sites différents qui fabrique la même pièce. L'usine A qui participe avec 72% de la production possède un taux de pièce défectueuse de l'ordre de 5%, alors l'usine B possède un taux de pièces Défectueuse de l'ordre de 2%

On pose comme évènement : A « Pièce produite par l'usine A » B « Pièce produite par l'usine B » D « Pièce défectueuse».

On a alors

$$P\left({}^{D}/_{A}\right) = 0.05$$

$$P\left({}^{D}/_{B}\right) = 0.02$$

Eléments de base :

$$P\left(A/_B\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P\left(A/_B\right) * P(B) = P\left(B/_A\right) * P(A)$$

Indépendance

Deux événements sont indépendants si la réalisation de l'un n'influence pas la réalisation de l'autre.
Exemple : Pluie, rouler avec des pneus lisses : a priori indépendant; pluie, avoir un accident a priori non indépendant.

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

Laboratoire d'Automatique et Productique LAP

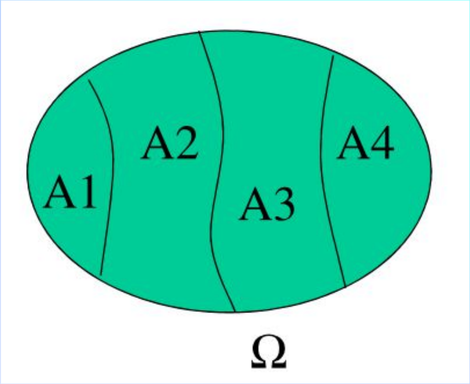
Genie Industriel

Théorème de Bayses

Le théorème de Bayes est utilisé dans l'inférence Statistique pour mettre à jour ou actualiser les estimations d'une probabilité ou d'un paramètre quelconque, à partir des observations et des lois de probabilité de ces observations. Il y a une version discrète et une version continue du théorème.

Considérons une partition de Ω

$$\bigcup_{p=1}^{n} A_p = \Omega$$



Et soit B un évenement quelconque de Ω

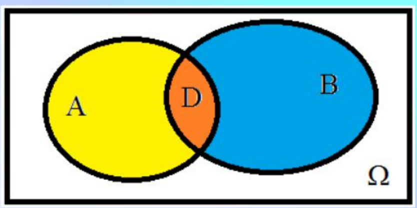
Le théorème de Bayes s'écrit alors

$$P\left({}^{A_i}/_{B}\right) = \frac{P\left({}^{B}/_{A_i}\right)}{\sum_{i=1}^{p} P\left({}^{B}/_{A_i}\right) * P(A_i)}$$

Reprenons cet Exemple:

Une entreprise possède 2 sites différents qui fabriquent la même pièce. L'usine A qui participe avec 72% de la production possède un taux de pièce défectueuse de l'ordre de 5%, alors l'usine B possède un taux de pièces Défectueuse de l'ordre de 2%

La question est alors: Les pièces sont placés dans un bac unique. On prend une pièce et en la vérifiant on constate quelle est défectueuse , quelle est la probabilité qu'elle vienne de l'usine A?



$$P\left(D/_A\right) = \frac{P\left(A/_D\right) * P(A)}{P\left(A/_D\right) * P(A) + P\left(B/_D\right) * P(B)}$$

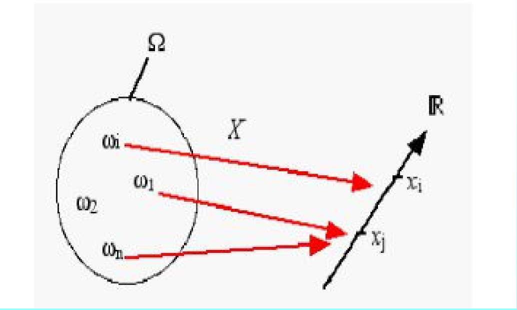
$$P\left(D/_A\right) = \frac{0.05 * 0.72}{0.05 * 0.72 + 0.02 * 0.28} = 0.865$$

VARIABLE ALEATOIRE

INTRODUCTION

Une variable aléatoire (V.A.)réelle est une application mesurable

$$X: \quad \Omega \longrightarrow \mathcal{R}$$
$$\omega \longrightarrow X(\omega)$$



Une variable aléatoire discrète prend ses valeurs dans un ensemble fini ou dénombrable

lancer un de, $X(\Omega) = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
nombre de photons émis par une source lumineuse pendant 1s, $X(\Omega) = \mathbb{N}$

Expérience aléatoire, événement aléatoire

Une expérience est dite aléatoire (random experiment-random trial) lorsqu'on ne peut pas en prévoir exactement les résultats du fait que tous les facteurs qui déterminent ce résultat ne sont pas maîtrisés ou contrôlés.

Un événement aléatoire est un événement qui peut ou ne pas se réaliser au cours d'une expérience aléatoire.

Exemple :
Expérience aléatoire "traverser la route"
Evénement aléatoire "se faire écraser".

FONCTION DE REPARTITION

Variables Aléatoires Discrètes

On appelle Fonction de Répartition d'une V.A « X » la fonction F_X telle que :

$$\begin{array}{llll} F_X : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \to & F_X(t) = P(X < t) \end{array}$$

Les propriétés associées à la fonction de répartition sont les suivantes :
Soit F_X la Fonction de Répartition d'une V.A discrète « X » alors :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad 0 \leq F_X(t) \leq 1$$

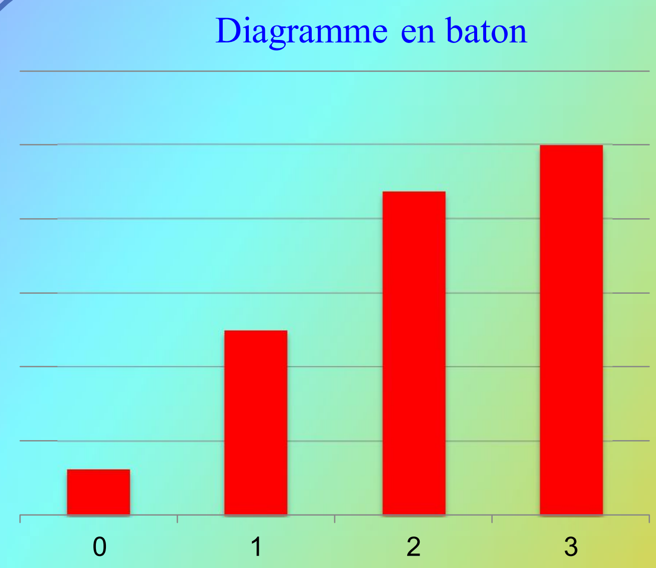
$$F_X \text{ est croissante sur } \mathbb{R}$$

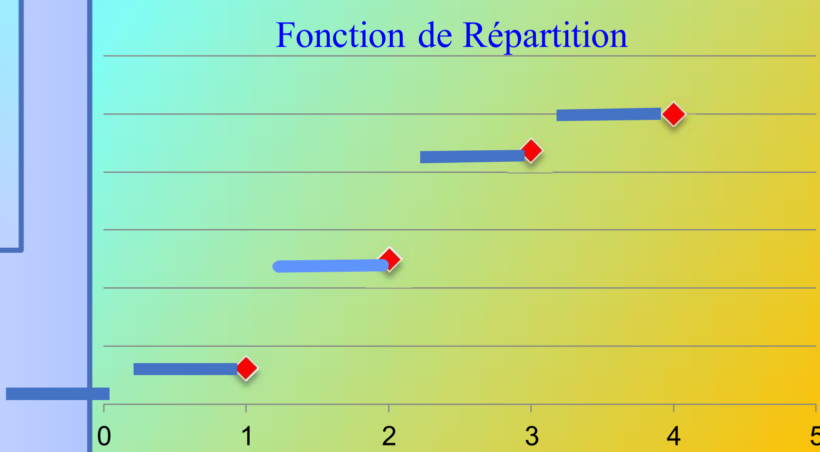
$$\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0 \quad et \quad \lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$$

$$Si \quad a \leq b \quad P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

On considère l'expérience consistant à lancer 3 pièces de maonaie et X la V.A donnant le nombre de piles obbtenu. Les valeurs que peut prendre X sont {0;1;2;3}. On a alors le tableau suivant :

Nombre de Pile	Situation	$P(X=x_i)$	F_X
0	{f;f;f}	1/8	1/8
1	{p;f;f} - {f;p;f} - {f;f;p}	3/8	4/8
2	{p;p;f}- {p;f;p} - {f;p;p}	3/8	7/8
3	{p;p;p}	1/8	1





Variables Aléatoires Continues

Une variable aléatoire continue peut prendre une infinité non dénombrable de valeurs, par exemple dans un intervalle ou sur tout R.

- Taille des individus d'une population, $X(\Omega) = [0;M]$
- Temps d'attente a la poste, $X(\Omega) = R+$
- Taux de cholestérol, $X(\Omega) = R+$
- Poids a la naissance, $X(\Omega) = [0;m]$

Dans le cas d'une V.A continue, la loi de probabilité associe une probabilité à chaque ensemble de valeur définies dans un intervalle donné.

REMARQUE: $P[X = x]$

Si la variable aléatoire X a une densité F_X , alors pour toute valeur a, la probabilité que X prenne la valeur a est 0 ! ! !

$$P(a) = P(a \leq X \leq a) = \int_a^a f_X(x)dx = 0$$

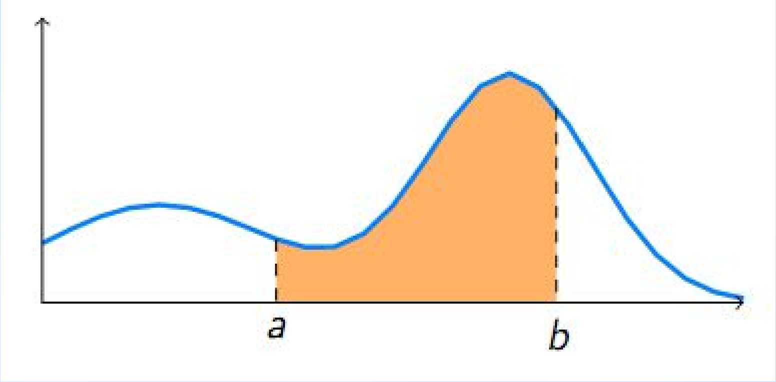
Laboratoire d'Automatique et Productique LAP

On s'intéresse plutôt a la probabilité que X prenne ses valeurs dans un intervalle donné [a; b]. Lorsque cet intervalle tend vers 0; la valeur prise par X tend alors vers une fonction que l'on appelle Fonction Densité de Probabilité ou Densité de Probabilité

Une variable aléatoire X est dite a densité lorsqu'il existe une fonction positive f_X: $\mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}^+$ telle que

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx \quad \text{pour tous } a, b \in \mathbb{R} \quad a \leq b$$

Cette fonction f_X est appelée densité de X.

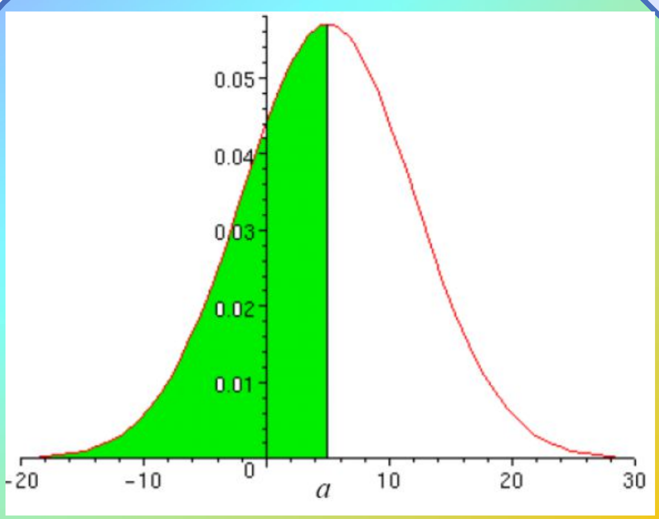


La probabilité $P(a \leq X \leq b)$ correspond a l'aire du domaine situe sous le graphe de f_X entre les abscisses a et b.

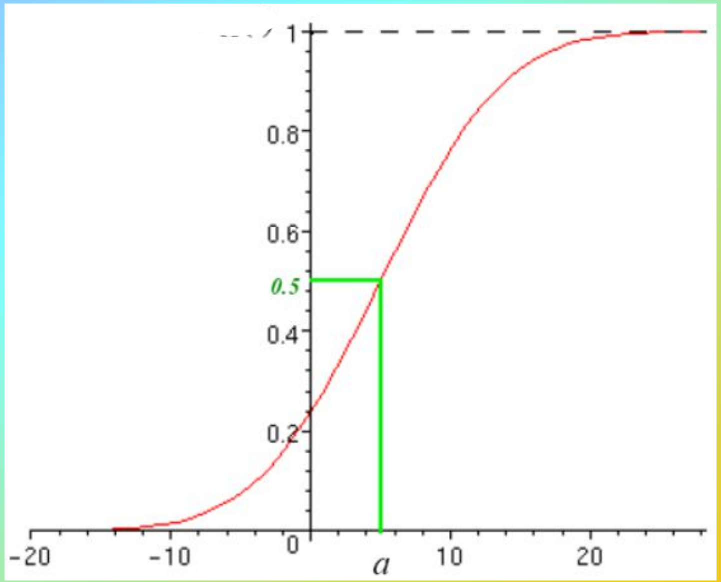
FONCTION DE REPARTITION

Variables Aléatoires Continues

La fonction de répartition correspond aux probabilités cumulées associées à la V.A continue sur l'intervalle d'étude



Fonction densité de probabilité *f(x)*



Fonction Répartition F_X

Laboratoire d'Automatique et Productique LAP

Espérance Mathématique

En théorie des probabilités , l'**espérance mathématique** d'une VA réelle est, intuitivement, la valeur que l'on s'attend à trouver, en moyenne, si l'on répète un grand nombre de fois la même expérience aléatoire. Elle se note E(X) et se lit « espérance de X ».

Variables Aléatoires Discrètes

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Variables Aléatoires Continues

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Quel est l'interêt du calcul de E(X)

Soit un jeu de hasard qui consiste à lancer un dé. Pour y participer vous devez déposer 4 DA et vous gagnerez l'équivalent en DA du nombre indiqué par le D

Face du Dé	VA	$P(X=x_i)$	$X_i p_i$
	**1**	**1/6**	**1/6**
	**2**	**1/6**	**2/6**
	**3**	**1/6**	**3/6**
	**4**	**1/6**	**4/6**
	**5**	**1/6**	**5/6**
	**6**	**1/6**	**6/6**

$$E(X) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6}$$

$$E(X) = \frac{21}{6} = 3.5$$

Cela veut dire que si on joue très souvent, on devra perdre en moyenne 0.5DA par partie et plus simplement le dépositaire du jeu gagne 0,50DA par jeu

Si deux personnes jouent à ce jeu alors le dépositaire gagne en moyenne 1DA et si 300 personnes jouent à ce jeu alors le dépositaire gagne en moyenne 150DA

Propriétés:

Soient X et Y deux variables aléatoires et $\lambda \in \mathbb{R}$ un nombre réel, on a alors

$$E(\lambda) = \lambda$$
$$E(\lambda X) = \lambda E(X)$$
$$E(\lambda + X) = \lambda + E(X)$$
$$E(\lambda_1 X + \lambda_2 Y) = \lambda_1 E(X) + \lambda_2 E(Y)$$

Attention cependant, même si l'espérance admet beaucoup de propriétés qui la rendent agréable, elle ne respecte pas en général la multiplication ($E(X * Y) \neq E(X) * E(Y)$) , sauf pour des variables indépendantes.

Variance

En théorie des probabilités, la **variance** est une mesure de la dispersion des valeurs d'un échantillon ou d'une distribution de probabilité.

Variables Aléatoires Discrètes

$$V(X) = \sum_{i=1}^{p} \left(x_i - E(X)\right)^2 * p_i$$

Variables Aléatoires Continues

$$V(X) = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - E(X)\right)^2 f(x)dx$$

$$V(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx\right)^2$$

Laboratoire d'Automatique et Productique LAP

Genie Industriel

Propriétés:

Soient X une variables aléatoires et λ ∈ ℝ un nombre réel, on a alors

$$V(\lambda) = 0$$

$$V(X + \lambda) = V(X)$$

$$V(\lambda * X) = \lambda^2 * V(X)$$