

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Batna 2 - Mustapha Benboulaïd



Faculté de Technologie

Département de Génie Mécanique

Support de cours

Destiné au parcours Master ERM / EN

Mécanique des fluides approfondie

partie I

Dr. Nabil BESSANANE

Année Universitaire : 2019 - 2020

Table des matières

1	Rappel d'analyse vectoriel	8
1.1	Les systèmes de coordonnées courants	8
1.2	Champs scalaire et vectoriel	9
1.2.1	Champ scalaire :	9
1.2.2	Champ vectoriel :	9
1.3	Comment utiliser Nabla ?	10
1.4	La signification du Gradient	11
1.5	La signification de la divergence	11
1.6	La signification du rotationnel	12
1.7	La signification du Laplacien	13
1.8	Quelques relations importantes	14
1.9	Applications :	14
2	La physique des fluides	16
2.1	Introduction	16
2.1.1	Échelle mésoscopique	17
2.1.2	Champ des vitesses dans un fluide	17
2.2	Équation fondamentale de l'hydrostatique	18
2.2.1	Forces de pression d'un fluide en repos	19
2.2.1.1	Cas de contrainte normale	19
2.2.1.2	Cas de contrainte tangentielle	21

2.2.1.3	Variation de force de pression	22
2.2.2	Forces de pression d'un fluide en mouvement (uniforme)	23
2.2.3	Forces de pression d'un fluide en mouvement (quelconque)	24
2.2.4	Application de de l'équation de BERNOULLI (approche statique)	27
2.2.4.1	Effet de gravitation sur un liquide	27
2.3	Théorèmes de transport	31
2.3.1	Volumes et surfaces de contrôle	31
2.3.2	Théorème de transport	31
3	Équations d'Euler (fluides parfaits)	33
3.1	Rappel de cinématique	33
3.1.1	Approche de Lagrange	33
3.1.2	Approche de Euler	34
3.2	Dynamique des fluides parfaits	35
3.2.1	Notion de dérivée particulière :	35
3.2.2	Équation d'Euler :	36
3.2.3	Équation de BERNOULLI : (autres approches)	37
3.2.4	Écoulement irrôationnel :	39
4	Équation de continuité (conservation de matière)	41
4.1	Courant de matière	41
4.2	Bilan de matière (conservation de masse)	43
4.3	Flux de matière d'un volume fini "V"	44
4.4	Équation de continuité	45
5	Équations de Navier-Stokes (fluides réels)	47
5.1	Généralités et définitions	47
5.2	Régime d'écoulement	47
5.3	Tenseur de contraintes	48

5.4	Équation de Navier-Stokes	49
5.4.1	Notion du tenseur de déformation	49
5.4.2	Décomposition du tenseur de déformation	50
5.4.3	Équation de Navier-Stokes	51
5.5	Pertes des charges (application aux fluides réels)	54
5.6	Pertes de charge linéaires	54
5.6.1	Application (mesure de la viscosité) :	55
5.7	Pertes de charge singulières	56
5.7.1	Coefficient de contraction :	57
5.7.2	Diagramme de Moody	58
6	Analyse dimensionnelle et similitude	63
6.1	Introduction	63
6.2	Procédure de l'analyse dimensionnelle	63
6.3	Théorème de Vaschy-Buckingham	64
6.3.1	Exemple d'application :	65
6.4	La signification du rotationnel	66
6.5	Similitude	67
6.5.1	Similitude géométrique	68
6.5.2	Similitude cinématique	68
6.5.3	Similitude dynamique	69
6.6	Régimes d'écoulement et paramètres de similitude	70
6.6.1	Nombre de Reynolds	70

Avant Propos

Le contenu de la première partie de cours MDF Approfondie est destiné aux étudiants de spécialités énergétique et énergies renouvelables en mécanique. Il s'agit de la matière de la mécanique des fluides appliquée, il regroupe quelques rappels et notions de bases, suivi de détails plus approfondies en ce qui concerne le développement des équations de bilans ; conservation de masse et de quantités de mouvement. Où l'étudiant peut connaître l'établissement des équations essentielles sur les quelles est fondée la mécanique des fluides ; tout en partant du 2nd principe de Newton avec les hypothèses adéquates pour déterminer l'équation de la continuité, les équations d'Euler, les équations de Navier-Stokes, l'équation de Bernoulli généralisée et voir aussi ses différentes formes appliquées selon le cas à étudier.

Ce polycopie cours est réparti à six chapitres et est présenté d'une manière méthodologique et simplifié du point de vue pédagogique. Le plan de ce cours est présenté comme suit :

1er chapitre : rappel sur les opérateurs mathématiques et des notions de l'analyse vectoriel pour la mécanique des fluides.

2ème chapitre : introduction à la physique des fluides.

3ème chapitre : (équation de Euler) rappel cinématique et approche Euler \Rightarrow Bernoulli pour la dynamique des fluides parfaits.

4ème chapitre : (équation de continuité), détermination de l'équation de bilan de matière (conservation de masse)

5ème chapitre : (équations de Navier-Stokes), détermination des équations de moments, Notion de tenseur de déformation et de contraintes (conservation de quantité de mouvement) et applications des pertes de charges dans le calculs de conduites (fluides réels et Bernoulli généralisé).

Remerciements : pour les relecteurs : Dr L.Messaoudi, Pr M.Si-Ameur, Pr M. Aksas, Pr A.H.Benmachiche, Dr G.Mebarki, Dr A.Benderradji.

Ce polycopie de cours n'est plus soumis à aucun droit et l'auteur a renoncé entièrement pour que son contenu soit largement diffusées et que le bénéfice puisse se répandre et l'étudiant de spécialité en profite autant que possible !

La gestion typographique du texte français a été réalisée avec Lyx et LATEX à l'aide du package french.sty de Bernard Gaulle.

Dans l'attente de l'achèvement d'une deuxième partie de ce cours (MDF approfondie) qui suivra dans le futur et qui va regrouper les volets suivants :

- Similitudes et analyse adimensionnel (adimensionnement).
- Écoulements cisailés et théorie de la couche limite.
- Écoulements turbulents et introduction aux modèles de turbulence.

Chapitre 1

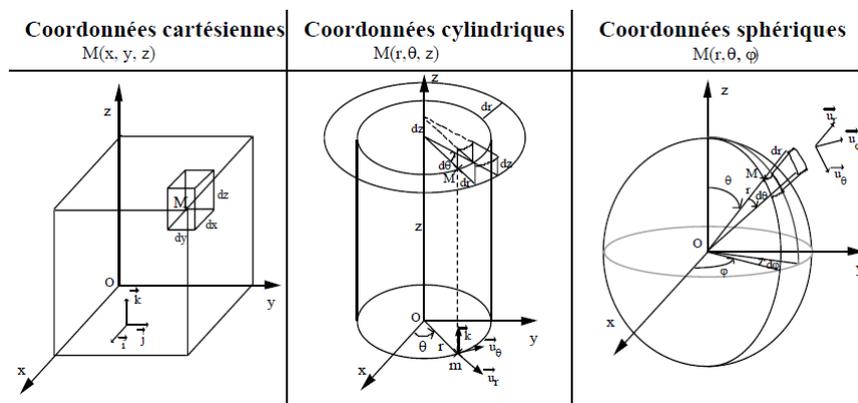
Rappel d'analyse vectoriel

Ce chapitre présente l'essentiel des notions mathématiques portant sur les opérateurs vectoriels et tensoriels et la notation indicielle, qui est largement utilisée dans le cours de Mécanique des Fluides.

1.1 Les systèmes de coordonnées courants

Pour repérer la position d'un point M dans l'espace à trois dimensions, il est nécessaire d'introduire trois axes non coplanaires. Le repérage peut alors être réalisé par l'introduction de (voir figure ci-dessous) :

- trois distances : coordonnées cartésiennes,
- deux distances et un angle : coordonnées cylindriques,
- une distance et deux angles : coordonnées sphériques.



1.2 Champs scalaire et vectoriel

Un champ est un outil physique qui donne, pour un point de l'espace, une valeur d'une grandeur physique. Autrement dit, le champ établit une correspondance entre une position de l'espace et une valeur prise par la grandeur physique étudiée.

Pour commencer, nous allons définir un champ scalaire ou vectoriel à partir de notions que tout étudiant connaît. Soit un trièdre orthonormé $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et M un point de l'espace, de coordonnées (x, y, z) ; d'où le vecteur position de M s'écrit : $\overrightarrow{OM} = X\vec{e}_x + Y\vec{e}_y + Z\vec{e}_z$

1.2.1 Champ scalaire :

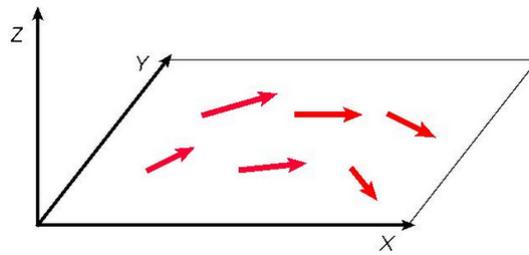
Un champ scalaire donne la valeur d'une grandeur physique scalaire en fonction de la position, pour un temps donné. exemple de : température, densité, pression...etc. La fonction $f(M)$ est dite fonction scalaire de point M ou champ scalaire si : $f(M) = f(x, y, z)$.

On parle de champ scalaire lorsque la grandeur physique est un nombre (réel). La température et la pression d'une zone sont décrits par des champs scalaires. Il existe différentes manières de représenter un champ scalaire selon son application : coloriage de contours, équipotentiels, graphe 3D...

1.2.2 Champ vectoriel :

Pour un moment donné, un champ vectoriel, ou champ de vecteurs, donne la valeur d'une grandeur vectorielle en fonction de la position M . Autrement dit, chaque point de l'espace est mis en correspondance avec un vecteur. Comme pour les champs scalaires, un champ vectoriel peut être étudié dans un espace 2D, ou 3D et dans le temps. Par exemples, le champ de la pesanteur, le champ magnétique, en mécanique des fluides le mouvement de gaz ou de liquides est étudié en utilisant des champs de vitesse.

Le vecteur vitesse $\vec{V}(M)$ est dit fonction vectorielle de point M ou champ vectoriel si : $\vec{V}(M) = \vec{u}(x, y, z)\vec{e}_x + \vec{v}(x, y, z)\vec{e}_y + \vec{w}(x, y, z)\vec{e}_z$.



Un champ vectoriel établit un lien entre une position de l'espace est une grandeur physique vectorielle. Les champs de vitesse en sont un exemple. Le champ de pesanteur est un champ vectoriel uniforme localement. Les champs électriques et magnétiques sont d'autres exemples de champ vectoriels.

1.3 Comment utiliser Nabla ?

On l'appelle Nabla ou aussi l'opérateur d'Hamilton chez les mathématiciens, les opérateurs mathématiques (Gradient, Divergence et rotationnel) peuvent être appliqués mathématiquement et utilisés sur des champs scalaires et vectoriels à travers l'opérateur différentiel Nabla, pour retrouver : le Gradient, la divergence, le rotationnel, Laplacien scalaire et Laplacien vectoriel.

Pour présenter le concept très utile de l'opérateur Nabla, il faut insister de connaître le principe du champ scalaire et champ vectoriel (définis précédemment), pour ne plus confondre entre les deux notions intuitives.

— Champ scalaire : soit une fonction φ , en coordonnées cartésiennes son champ scalaire est définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi : R^3 \longrightarrow R \\ M(x, y, z) \longrightarrow \varphi(x, y, z) = \varphi(M) \end{array} \right.$$

exemples : température, pression ; énergie potentiel...etc.

— Champ vectoriel : soit un vecteur $\vec{A}(M)$, mathématiquement on définit le champ vectoriel de ce vecteur par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{A} : R^3 \longrightarrow R^3 \\ \vec{r}(x, y, z) \longrightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \begin{cases} A_x(x_1, y_1, z_1) \\ A_y(x_2, y_2, z_2) \\ A_z(x_3, y_3, z_3) \end{cases} \end{array} \right.$$

c'est dans le cas d'un état stationnaire ; c'est à dire, qui ne dépend pas de t (temps).

exemples : champ des vitesses, champ des forces, champ magnétique, champ électrique ...etc.

Donc, pour trouver les notions de gradient, divergence et rotationnel, on va utiliser l'opérateur différentiel Nabla. C'est le symbole triangle tête en bas avec flèche « ∇ », on le note formellement dans le système de coordonnées cartésiennes par :

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Remarque : Il est alors évident que pour avoir les composantes de cet opérateur dans les différents systèmes de coordonnées, il suffit de reprendre celles du gradient (ci-après) et d'enlever la fonction φ .

1.4 La signification du Gradient

- **Le gradient :** \vec{grad} est une quantité vectoriel et est appliqué seulement pour un scalaire et non pas sur un vecteur. on dit le gradient d'un champ scalaire.

pour trouver le gradient d'une fonction φ , on écrit : $\vec{grad}\varphi = \vec{\nabla}\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{pmatrix}$; comme un produit scalaire entre Nabla et la fonction scalaire φ .

Il faut noté ! Le gradient donne donc des informations sur la direction, sur le sens de la variation de la fonction f mais aussi sur l'importance de cette évolution.

1.5 La signification de la divergence

- **La divergence :** $div \vec{A}$ est une quantité scalaire et elle même appliquée à un

$$\text{vecteur } \vec{A}, \text{ on écrit : } div \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} ;$$

comme un produit scalaire entre Nabla et le vecteur \vec{A} .

L'expression de la divergence dans les différents systèmes de coordonnées est présentée dans la suite :

Coordonnées cartésiennes : $div \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

Coordonnées cylindriques : $div \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

Coordonnées sphériques : $div \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$

Remarque : en coordonnées cartésiennes, il faut utiliser $\vec{\nabla}$. Avec les coordonnées sphériques, compte tenu des multiples implications de $\vec{\nabla}$ sur la base, il sera préférable d'utiliser le théorème d'Ostrogradski-Green (voir section 3.3). Dans le cas des coordonnées cylindriques, les deux possibilités sont à peu près équivalentes.

1.6 La signification du rotationnel

— **Le rotationnel :** est une quantité vectoriel et est appliqué sur un vecteur

\vec{A} (très utile en mécanique des fluides et électromagnétisme), on écrit : $\vec{rot} \vec{A} =$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ -\frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

— Coordonnées cartésiennes : $\vec{rot} \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$

— Coordonnées cylindriques : $\vec{rot} \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \end{pmatrix}$

— Coordonnées sphériques : $\vec{rot} \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \end{pmatrix}$

Remarque : une remarque fondamentale consiste à dire que le caractère rotationnel n'est pas lié à la courbure des lignes de champ. Il ne suffit pas que ces lignes de champ soient rectilignes pour que l'écoulement soit irrotationnel bien au contraire ! Cet opérateur nous donne donc des informations sur le caractère localement tourbillonnaire du champ

vectoriel.

1.7 La signification du Laplacien

— **Le Laplacien** : il faut faire attention ! Il y a le **Laplacien scalaire** et le **Laplacien vectoriel**. il est noté par le symbole triangle tête en haut « Δ ».

1. **Le Laplacien scalaire** : Le Laplacien d'une fonction scalaire φ est : $\Delta\varphi =$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\varphi) &= \operatorname{div} \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) = \\ & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \implies \Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \overrightarrow{\nabla} \cdot (\overrightarrow{\nabla}\varphi) = \overrightarrow{\nabla}^2\varphi = \Delta\varphi \end{aligned}$$

2. **Le Laplacien vectoriel** : Le Laplacien d'un champ vectoriel (vecteur \overrightarrow{A})

$$\text{est : } \overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{pmatrix}, \text{ à noter que } A_x, A_y \text{ et } A_z \text{ ce sont des champs scalaires. il}$$

est bien appliqué en mécanique des fluides dans le cas des calculs des équations de Navier-Stokes.

$$\text{donc, on écrit : } \begin{cases} \Delta A_x = \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}A_x) = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \Delta A_y = \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}A_y) = \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \Delta A_z = \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}A_z) = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{cases}$$

on obtient à la fin le Laplacien d'un vecteur \overrightarrow{A} , qui s'écrit sous cette forme de vecteur :

$$\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

Remarque : la majorité des étudiants se trompent dans l'écriture du Laplacien de

$$\text{vecteur } \overrightarrow{A}, \text{ ou il mette : } \overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}; \text{ qui est évidemment faux !}$$

Remarque très importante : il faut bien noter qu'on ne peut pas utiliser un pseudo opérateur Nabla "∇" en coordonnées cylindriques, cylindropolaires ou sphériques. Atten-

tion! Ça ne marche pas et ça ne fonctionne que en coordonnées cartésiennes, car c'est le seule systèmes de coordonnées avec lequel on peut trouver ces opérateurs sus-cités.

1.8 Quelques relations importantes

- $\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot}A}) = 0$: ceci est évident en écrivant cette relation avec l'opérateur nabla : $\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot}A}) = \overrightarrow{\nabla} \bullet (\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A}) = 0$. Cette égalité implique que si la divergence d'un champ vectoriel \overrightarrow{B} est égale à 0, nous pourrons mettre \overrightarrow{B} sous la forme $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\operatorname{rot}A}$.
- $\overrightarrow{\operatorname{rot}(\overrightarrow{\operatorname{grad}f})} = \overrightarrow{0}$: en utilisant l'opérateur nabla, cette égalité est elle aussi évidente : $\overrightarrow{\operatorname{rot}(\overrightarrow{\operatorname{grad}f})} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{\nabla} f$. En mécanique des fluides, si le rotationnel du champ des vitesses est nul, on parle d'écoulement irrotationnel et l'on introduit la fonction scalaire potentielle des vitesses φ définie par $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\operatorname{grad}(-\varphi)}$.

1.9 Applications :

Exercice 1 : Soit deux points M et P de coordonnées respectives M(x,y,z) et P(x_P, y_P, z_P)

1. Calculer $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{PM}$ et $r = \|\overrightarrow{PM}\|$.
2. Calculer $\overrightarrow{\nabla}(\frac{1}{r})$ au voisinage de M.
3. Calculer $\overrightarrow{\nabla} \times (\frac{\overrightarrow{r}}{r^3})$ au voisinage de M.
4. Calculer $\overrightarrow{\nabla} \bullet (\frac{\overrightarrow{r}}{r^3})$ au voisinage de M.

Réponses :

1. Le vecteur position $\overrightarrow{PM} : \overrightarrow{r} = (x - x_P)\overrightarrow{e}_x + (y - y_P)\overrightarrow{e}_y + (z - z_P)\overrightarrow{e}_z$

et le module du vecteur position $\overrightarrow{PM} : r = \sqrt{(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 + (z - z_P)^2}$

2. $\overrightarrow{\nabla}(\frac{1}{r}) = -\frac{(x-x_P)\overrightarrow{e}_x + (y-y_P)\overrightarrow{e}_y + (z-z_P)\overrightarrow{e}_z}{[(x-x_P)^2 + (y-y_P)^2 + (z-z_P)^2]^{3/2}} = -\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}$

3. En tenant compte du résultat précédent et sachant que le rotationnel d'un gradient est nul, on obtient le produit vectoriel :

$$\overrightarrow{\nabla} \times \left(\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}\right) = \overrightarrow{0}$$

4. Le produit scalaire est :

$$\vec{\nabla} \bullet \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = 0$$

Exercice 2 :

Soit : $f(x, y) = x^2 + y^3$

1. Calculer la divergence de f : (∇f)
2. Calculer Laplacien de f : (Δf)

Chapitre 2

La physique des fluides

On appelle Mécanique l'étude des déplacements et des déformations des corps au cours du temps, y compris l'étude des conditions qui entraînent ces mouvements. Nous considérerons ici la Mécanique au sens restreint où n'interviennent ni changements d'état physique, ni transformations chimiques (vaporisation, cavitation, combustion. . .). Ce chapitre contient des rappels de base en mécanique des fluides, liés à la physique des fluides et ses concepts fondamentaux.

2.1 Introduction

La dynamique est la partie de la Mécanique des fluides qui étudie (sans expliciter la variable température T) les mouvements ou le repos dans leurs rapports avec les forces qui les engendrent. La cinématique fournit le cadre spatiotemporel dans lequel sont décrits les mouvements dans l'espace euclidien à 3 dimensions. La cinétique se construit à partir de la cinématique en introduisant la notion de masse.

La Mécanique des fluides (MDF) étudie la physique des fluides, afin de décrire un fluide en repos ou en mouvement.

Dans la physique du solide : on s'intéresse à la distance : $d(M_1 M_2) = C^{\text{ste}}$

$$\implies \vec{V}_A \cdot \vec{AB} = \vec{V}_B \cdot \vec{AB}$$

on peut tirer un champ de vitesse pour solide, c'est la projectivité des vitesses (translation, rotation ou les contrainte).

où : $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AB}$.

Pour un fluide : les molécules peuvent se déplacer « librement », les unes par rapport aux autres, et donc la distance $d(M_1M_2)$ peut varier à n'importe quel instant.

On ne peut pas suivre les particules une par une (impossible!), en thermodynamique (1 mole $\rightarrow \mathcal{N} = 6.10^{23}$) d'un système en équilibre - dit volume de contrôle (VC) - est décrit par des grandeurs moyennes intensives " ρ, x, P, T " et extensives "volume, masse". Cela n'est pas suffisant dans le cas de l'hydrodynamique des fluides, car elles sont non homogènes sur l'ensemble du VC, et les différentes propriétés du fluide ne sont plus les mêmes dans les différents points du volume de contrôle.

2.1.1 Échelle mésoscopique

Entre l'échelle microscopique et macroscopique, il y a l'échelle mésoscopique (échelle ponctuelle). C'est une échelle située entre les deux échelles micro et macro.

Définition : l'échelle mésoscopique « ponctuel » est une échelle inférieure aux échelles sur lesquelles les grandeurs moyennes varient suffisamment grand pour décrire l'échelle moyen et sa variation est très petite d'un point matériel à l'autre.

2.1.2 Champ des vitesses dans un fluide

Pour un petit élément de fluide à l'échelle mésoscopique, le champ des vitesses en un point M est présenté par : $\vec{v}(M) = \langle \vec{v}_i \rangle$.

En chaque point M, il y a une vitesse spécifique \vec{v}_i lié à ce dernier.

Soit deux points matériels M et M' de masse m et de volume élémentaire V suffisamment petit ($V=0$).

En peut définir des champs des différent paramètres :

- Champ des masses volumiques, $\rho(M) = \frac{dm}{dV}$
- Champ des températures T(M), d'après les lois de la statistique à l'équilibre d'un système, la description des particules ne change pas .
- Champ des vitesses $\vec{v}(M)$: la distribution de la vitesse obéie à la probabilité : $P(v_x) = K \exp - \frac{\frac{1}{2}mv_x^2}{k_B T}$

c'est une Gaussienne de forme : $e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, la densité de distribution de vitesse est unique à l'équilibre et la seule différence est la largeur de la gaussienne $\langle \frac{1}{2}mv^2 \rangle = \langle \frac{3}{2}k_B T \rangle$. La température est le seule et unique paramètre qui détermine la vitesse.

Champ de pression : $P = \frac{1}{3}nmv^2$ ou $P = nkT$, c'est la pression exercée par un fluide sur une paroi immergée dans un fluide.

La 2nd loi de Newton : $m \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{f}_i$, à un instant « t » il y a des milliard de molécule qui viennent frapper la paroi.

On a : $d\vec{F} = P.dS.\vec{n}_\perp$, avec : $P = nk_B T$ et $n = \frac{N}{V} = \frac{\text{nombre de particules}}{\text{volume}}$

où : $PV = Nk_B T \implies PV = n\mathcal{N}_A k_B T \implies PV = nRT$.

Une fois qu'on a compris qu'il y a une distribution de vitesse pour un système à l'équilibre, caractérisée par une grandeur de T et avec le calcul de la pression, on trouve $PV = nRT$. Cela est à l'échelle moléculaire (càd microscopique).

Lorsqu'on a un large système, on n'est pas obligé de suivre chaque molécule, car dès que le système est suffisamment vaste (largement grand) et à l'équilibre, alors la distribution des vitesses est déterminée de la distribution dite de Maxwell Boltzmann.

Pression en un point du fluide à l'équilibre $\implies \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ (c'est l'état statique du fluide).

2.2 Équation fondamentale de l'hydrostatique

En général, lorsqu'il s'agit d'un système solide en équilibre, on a : $(\vec{v} = \vec{0} \text{ et } \vec{\Omega} = \vec{0})$

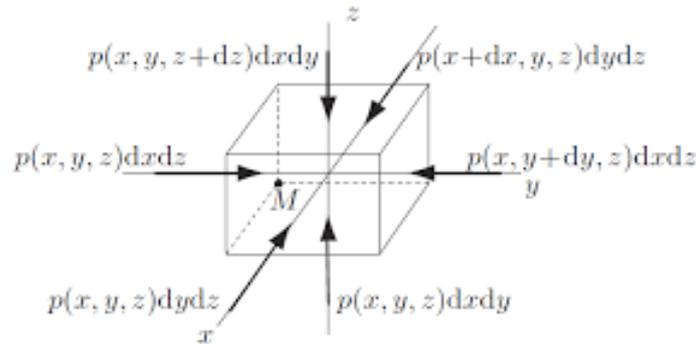
Tandis que pour le cas d'un fluide en équilibre, on a : $(\vec{v}(M) = \vec{0} ; \forall M \implies \vec{v}_A = \vec{v}_G + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM})$

càd. $\langle m \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt} \rangle = \langle \vec{f}_i \rangle \implies M \cdot \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \sum \vec{f}_{ext}$

Soit un point matériel M de fluide (élément de volume $dV = dxdydz$). En plus des forces standards (poids) qui s'exerce sur l'élément il y a aussi les forces de pression. Dans un récipient, il y a une infinité de particule fluide.

Au repos, le bilan de forces : $\sum \vec{f}_{ext} = \vec{0}$, le fluide est à l'équilibre statique et il est soumis à des forces standards :

— poids : $dm \vec{g} = \rho dV \vec{g} = \rho dxdydz \vec{g}$


 FIGURE 2.1 – Bilan de forces sur un élément de fluide dV

- autres forces éventuelles (magnétique, inertie)
- forces de pression : comme les forces exercées sur chaque parois solide.

2.2.1 Forces de pression d'un fluide en repos

2.2.1.1 Cas de contrainte normale

Pour un élément de volume $dV = dxdydz$ en équilibre, les projections des forces exercées sur cet élément par rapport aux axes donnent :

$$\text{OX} : d\vec{F}_x = \vec{F}_x - \vec{F}_{x+dx} = P_x \cdot dydz \cdot \vec{i} - P_{x+dx} \cdot dydz \cdot \vec{i} \text{ avec : } P_{x+dx} = P_x + dP_x$$

$$\text{d'où : } d\vec{F}_x = -dP_x \cdot dydz \cdot \vec{i} \implies F_x = -\frac{\partial P}{\partial x} dxdydz ; \text{ car : } df_n = \frac{\partial f}{\partial n} dn$$

de même pour les autres axes :

$$\text{OY} : d\vec{F}_y = \vec{F}_y - \vec{F}_{y+dy} \implies d\vec{F}_y = -dP_y \cdot dxdz \cdot \vec{j} \implies F_y = -\frac{\partial P}{\partial y} dydxdz$$

$$\text{OZ} : d\vec{F}_z = \vec{F}_z - \vec{F}_{z+dz} \implies d\vec{F}_z = -dP_z \cdot dxdy \cdot \vec{k} \implies F_z = -\frac{\partial P}{\partial z} dzdxdy$$

$$\text{alors, la variation de force de pression est écrite : } d\vec{F}_{\text{pression}} = -\left[\frac{\partial P}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{k} \right] dxdydz$$

$$\text{on a : } dP = \overrightarrow{\text{grad}}P \cdot d\vec{r} \text{ avec : } d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

$$\text{donc : } d\vec{F}_{\text{pression}} = -\overrightarrow{\text{grad}}P \cdot dV ; \text{ c'est l'effet de variation des forces de pression.}$$

$$\text{et pour les forces volumique (gravitationnelle), on a : } d\vec{F}_{\text{gravité}} = \rho \cdot \vec{g} \cdot dV$$

$$\text{Donc, à l'équilibre : } \sum \vec{f}_{\text{ext}} = \vec{0}$$

$$\implies d\vec{F}_{\text{pression}} + d\vec{F}_{\text{gravité}} = \vec{0}$$

$$\implies -\overrightarrow{\text{grad}}P \cdot dV + \rho \cdot \vec{g} \cdot dV = \vec{0}$$

$$\implies \overrightarrow{\text{grad}}P = \rho \cdot \vec{g}$$

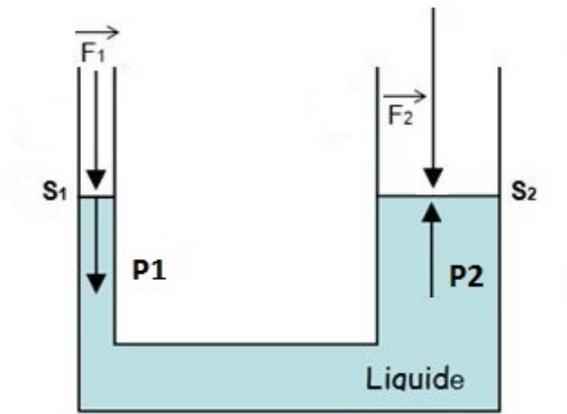


FIGURE 2.2 – forces de vérin hydrostatique

Vérin hydrostatique :

Soit un dispositif de vérin hydraulique, le système est en équilibre et les pistons sont maintenus dans le même niveau. Si on applique une force F_1 de 100N sur le piston P_1 , quelle doit être la charge possible à soulever par le vérin. On donne le rapport de diamètres ($S_2/S_1=10$).

F_1 : La force de pression au point 1 en [N].

F_2 : La force de pression au point 2 en [N].

S_1 : La surface pressée 1 en [m^2].

S_2 : La surface pressée 2 en [m^2].

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$

Dans cet exemple, les forces de pression de variation importante sont celles agissant dans la direction verticale. Faisant un bilan de forces sur (OZ) pour chacun des deux cotés du système.

On a à l'équilibre du vérin : $F_2 + P_{atm}S_2 - P_2S_2 = 0 \Rightarrow F_2 + PS_2 = 0$

et à l'équilibre de la pompe : $F_1 + P_{atm}S_1 - P_1S_1 = 0 \Rightarrow F_1 + PS_1 = 0$

à l'équilibre de tout le système, on a : $z_1 = z_2$ et $P_1 = P_2$ d'où : $\frac{F_2}{S_2} = \frac{F_1}{S_1}$, donc : $F_2 = F_1(S_2/S_1) = 100 \times 10^2$

$\Rightarrow F_2 = 10KN$. (c'est la charge qui peut être soulevée).

Poussée d'Archimède :

On prend l'exemple d'un corps complètement émergé dans un fluide, ce dernier reçoit de la part de ce fluide une force verticale appelée (poussée d'Archimède), dirigée vers le haut dont l'intensité est égale au poids du volume du fluide déplacé (ce volume est donc égal au volume immergé du corps), voir figure ci-dessous (1.2).

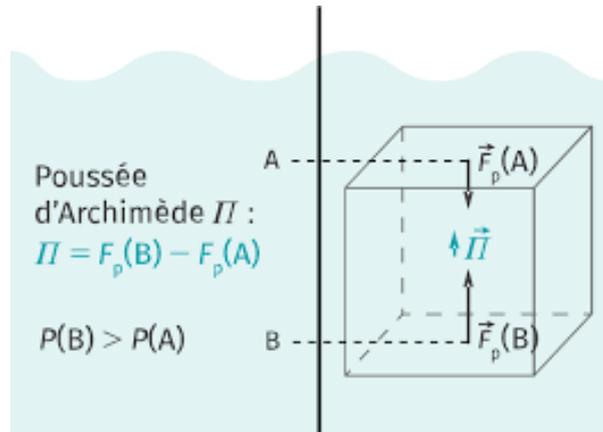


FIGURE 2.3 – Poussée d'Archimède

La différence de pression est : $F_B - F_A = \rho_f \cdot V_{immergé} \cdot g$

La force de poussée est donnée comme suit : $F_{BA} = \rho_f \cdot V_{immergé} \cdot g$

à l'équilibre, on a : $\sum_i \vec{F}_{ext} = 0 \implies F_B - F_A - P = 0 \implies \Pi \cdot A - P = 0$

avec : $P = m \cdot g = \rho \cdot V \cdot g$

Alors : $\Pi \cdot A - \rho \cdot V \cdot g = 0$, d'où : $\Pi \cdot A = \rho \cdot V \cdot g$

2.2.1.2 Cas de contrainte tangentielle

On prend l'expérience de Couette, le cas d'un fluide entre deux plaques parallèles de même surface A , distantes de h (voir Figure 2.3), l'une fixe et l'autre est mobile. La plaque mobile se déplace avec une vitesse horizontale U et la force qui cause son déplacement est F .

Il est montré expérimentalement que suite à l'effet de la force F , il résulte une contrainte de cisaillement dans le fluide entre les deux plaques. Cette contrainte (tension) est opposée au mouvement de la plaque et du fluide, elle est exprimée par : $\tau = \frac{F}{A} \left[\frac{N}{m^2} \right]$.

Remarque : L'unité de cette contrainte (de cisaillement) est du Pascal : $\frac{N}{m^2} = Pa$, il s'agit d'une force F par rapport à une surface S , seulement cette force est de direction tangentielle et elle n'est pas normale comme pour la pression ordinaire notée par P .

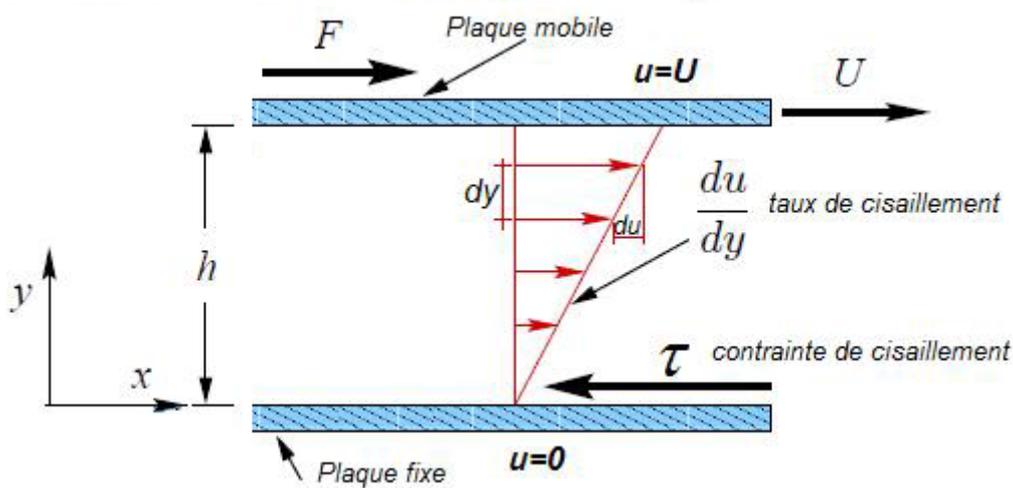


FIGURE 2.4 – Expérience de viscosité

Il est prouvé aussi que la contrainte de cisaillement est proportionnelle au gradient de vitesse u suivant la distance h entre les deux plaques : $\tau \sim \frac{\partial u}{\partial y}$

Autrement dit, la contrainte de cisaillement est proportionnelle au taux de déformation et la constante de proportionnalité est **le coefficient de viscosité dynamique (μ)** :

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.1}$$

Un réarrangement de l'éq. (1) donne : $\mu = \frac{\text{Contrainte de cisaillement}}{\text{taux de cisaillement}} = \frac{\frac{F_s}{A_s}}{\frac{dU}{dy}} = \tau \frac{dy}{dU} ; \left[\frac{N.s}{m^2} \right] = \left[\frac{kg}{m.s} \right]$ ou $[Pa.s]$

La viscosité cinématique (ν) est définie comme étant : la viscosité dynamique sur la masse volumique, son unité est $[m^2/s]$. Elle est exprimée comme suit : $\nu = \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{m^2}{s} \right]$

2.2.1.3 Variation de force de pression

Pour les gaz (fluide compressible) et dans le cas de l'air (atmosphère), la pression varie avec l'altitude, et obéie à la loi des Gaz Parfait. (figure 2.4)

$$P(z) = P_0 \exp^{-\left(\frac{Mg}{RT}\right)z}$$

tel que : $P_0 = \exp^{-\left(\frac{Mg}{RT_0}\right)z_0}$, pour l'atmosphère à : $T_0 = 300K$

Tendis que pour les liquides (fluide incompressible), la pression varie avec profondeur et obéie à la loi de l'hydrostatique. (figure 2.4)

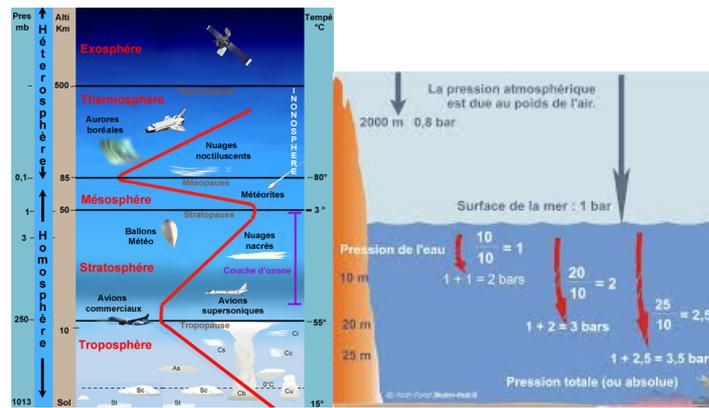


FIGURE 2.5 – variation de pression atmosphérique et sous marine [6]

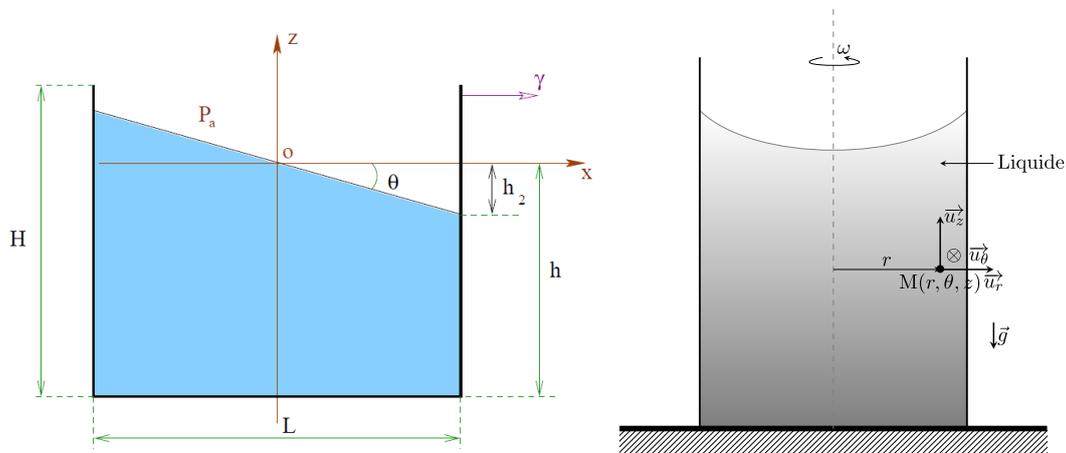


FIGURE 2.6 – Liquides en mouvements uniformes

$$P(z) = P_0 + \rho gh$$

avec : $h = z - z_0$ est la différence de profondeur et $P_0 = P(z_0)$.

2.2.2 Forces de pression d'un fluide en mouvement (uniforme)

L'étude de déformation de la surface libre d'un liquide en mouvement uniforme (à vitesse constante). Par exemple, les deux cas (connus), celui du réservoir (contenant un liquide) en translation à vitesse linéaire constante ($\vec{V} = C^{ste}$) et le second cas est le vortex forcé qui tourne à vitesse angulaire constante ($\omega = C^{ste}$). Dans cette catégorie de problème, il est nécessaire d'appliquer la loi fondamentale de l'hydrostatique. (figure 2.5)

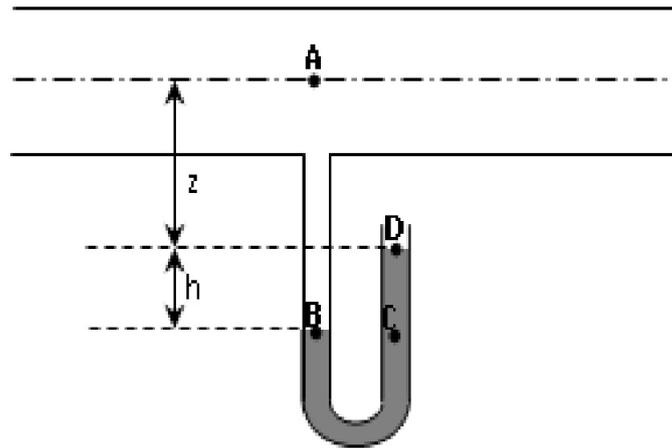


FIGURE 2.7 – Conduite avec tube en U

2.2.3 Forces de pression d'un fluide en mouvement (quelconque)

L'étude de mouvement quelconque d'un fluide (ex. conduites), nécessite parfois la mesure de pression locale ou totale à des endroits bien spécifiés. Pour cela dans l'ingénierie, les instruments de mesure souvent employés utilisent des techniques basées sur l'application de la loi fondamentale de l'hydrostatique, par exemples : les baromètres en U, à cuvette, à siphon, les tubes de Pitot et les l'effet de Venturi...etc.

Bien sûr, ça nous ramène à introduire la notion de conservation d'énergie dans un volume de contrôle (V.C.). C'est à dire, on va ajouter un 3ème terme à l'équation fondamentale de l'hydrostatique et qui deviendra l'équation (très connue) de Bernoulli.

Dans ce genre de problème, on fait appel à la fois à l'équation de Bernoulli et aussi à l'équation de l'hydrostatique (au niveau des sondes de mesure de pression). quelques exemples d'application sont présentés ci-après.

Application 1 : conduite avec tube en U

De l'huile de densité 0,75 circule à travers une conduite horizontale (figure 2.7), et fait monter le mercure dans le manomètre en "U". Calculer la valeur de la hauteur h , si la pression mesuré au point A est égale à $1,4 \text{ kg/cm}^2$. On donne : $z = 0,825 \text{ m}$.

Réponse :

On a : $P_B = P_C$ (points B et C même niveau et même fluide).

En appliquant la loi fondamentale de l'hydrostatique entre les points A-B et C-D, on

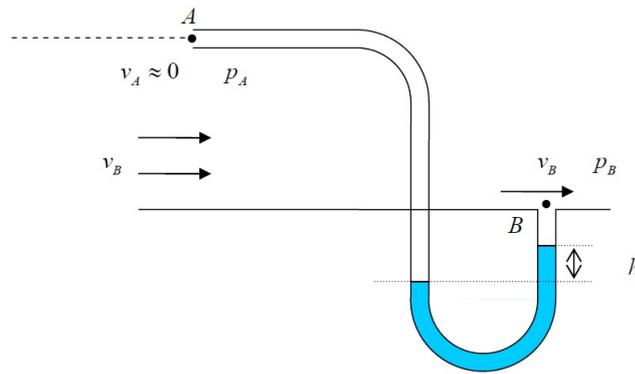


FIGURE 2.8 – Principe de la sonde de Pitot

trouve :

$$\implies P_A + \rho \cdot g \cdot (z + h) = P_D + \rho_m \cdot g \cdot h$$

$$\implies h \cdot g \cdot (\rho_m + \rho) = P_A - P_D + \rho \cdot g \cdot z$$

$$\implies h = \frac{P_A - P_D + \rho \cdot g \cdot z}{g \cdot (\rho_m + \rho)}$$

$$A.N. : \implies h = \frac{1.4 \times 10^5 - 101325 + 750 \times 10 \times 0.825}{10 \cdot (113600 + 750)}$$

$$\implies h = 1.14m$$

Application 2 : sonde de Pitot « tube en U »

La sonde de Pitot permet de mesurer la vitesse d'un écoulement d'air autour d'une structure, par exemple un avion.

A l'entrée du tube, en A, la vitesse de l'air est nulle. Au point B, la vitesse de l'air est sensiblement égale à sa valeur non perturbée par l'instrument. L'équation de Bernoulli nous donne :

$$\implies P_A = P_B + \frac{\rho}{2} v^2$$

donc, la vitesse de l'air est : $v = \sqrt{\frac{\rho}{2} (P_A - P_B)}$ m/s

L'équation de Bernoulli permet de comprendre le principe de divers instruments et appareils tels que trompe à eau, bec Bunsen, pistolet à peinture, carburateur, etc... En revanche, elle ne permet pas d'expliquer les pertes de charge dans les tuyaux, car le fluide est supposé non visqueux.

Application 3 : deux conduites avec tube en U

Soit deux conduites de sections S_A et S_B , qui contiennent de l'eau aux pressions respectives de 2,80 et 1,40 bar. on demande de calculer la dénivellation h de mercure du manomètre différentielle. On donne : $x + y = 2m$. La densité du mercure est : $d = 13,57$.

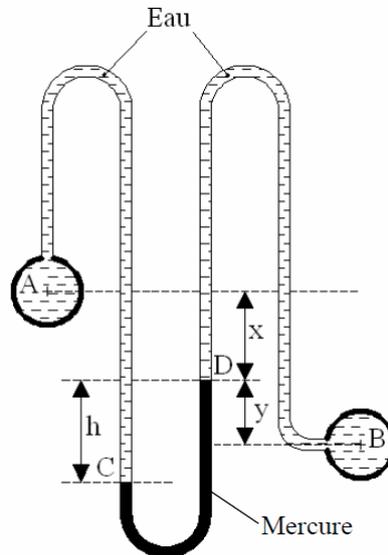


FIGURE 2.9 – Différence de pression entre deux conduites

En appliquant l'équation de l'hydrostatique entre les points A et C, on trouve :

$$P_C - P_A = \rho_{eau} \cdot g \cdot (Z_A - Z_C) \implies P_C = P_A + \rho_{eau} \cdot g \cdot (h + x)$$

En appliquant l'équation de l'hydrostatique entre les points C et D, on trouve :

$$P_D - P_C = \rho_{mercure} \cdot g \cdot (Z_C - Z_D) \implies P_D = P_C + d \cdot \rho_{eau} \cdot g \cdot (-h)$$

$$\implies P_D = P_A + \rho_{eau} \cdot g \cdot (h + x) + d \cdot \rho_{eau} \cdot g \cdot (-h)$$

$$\implies P_D = P_A + \rho_{eau} \cdot g \cdot x + \rho_{eau} \cdot g \cdot h(1 - d)$$

En appliquant l'équation de l'hydrostatique entre les points D et B, on trouve :

$$P_B - P_D = \rho_{eau} \cdot g \cdot (Z_D - Z_B) \implies P_B = P_D - \rho_{eau} \cdot g \cdot y$$

$$\implies P_B = P_A + \rho_{eau} \cdot g \cdot (x + y) + \rho_{eau} \cdot g \cdot h(1 - d)$$

$$\implies h = \frac{P_B - (P_A + \rho_{eau} \cdot g \cdot (x + y))}{\rho_{eau} \cdot g \cdot (1 - d)} = \frac{2,8 \times 10^5 - (1,4 \times 10^5 + 1000 \times 9,81 \times 2)}{1000 \times 9,81 \times (1 - 13,57)}$$

AN : $h = 0,95m$.

2.2.4 Application de de l'équation de BERNOULLI (approche statique)

Le passage de la loi fondamentale de l'hydrostatique à l'équation de Bernoulli, s'effectue selon le principe de conservation d'énergie. Tout en considérant la variation de l'énergie cinétique, qui est (toujours) égale à la somme des travaux des forces extérieures.

$$dE_c = \sum \delta W = -dE_P + \delta W_{\text{forces pression}} \implies \frac{1}{2}v^2 + \frac{g}{\rho}z + \frac{P}{\rho} = C^{te}$$

et l'énergie totale d'un fluide statique est conservé tout point de ce fluide.

$$\text{càd. } E_{\text{totale}} = E_{\text{cinétique}} + E_{\text{potentielle}} + E_{\text{locale}} = C^{te}$$

2.2.4.1 Effet de gravitation sur un liquide

Application de vidange d'un réservoir (formule de Torricelli) Considérons un réservoir de grande section, rempli d'un liquide qui s'écoule à travers un orifice de section faible (devant celle du réservoir) et situé à une hauteur sous la surface libre (voir figure). La pression atmosphérique P_0 s'exerce à la fois sur la surface libre et sur le jet à la sortie de l'orifice. En supposant que le liquide est incompressible et non visqueux, il est possible d'utiliser l'équation de Bernoulli pour déterminer la vitesse de vidange du réservoir.

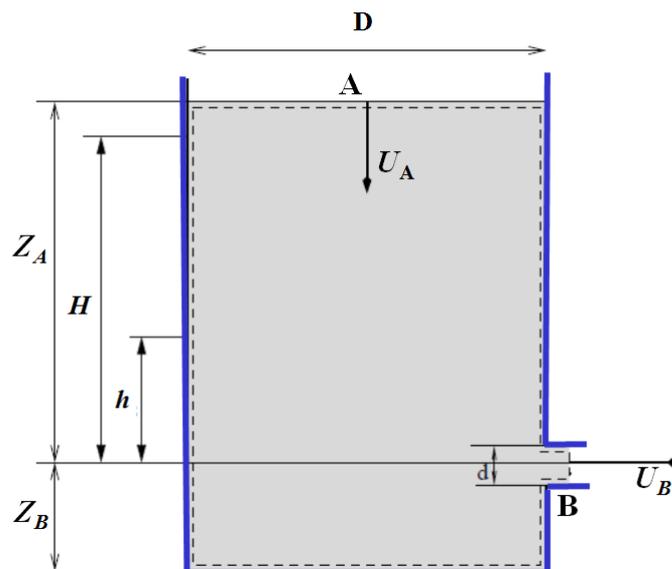


FIGURE 2.10 – Vidange de réservoir

Considérons un point A de la surface libre et un point B situé dans le jet. Il existe une

ligne de courant passant par ces deux points et le long de laquelle on peut appliquer l'équation de Bernoulli :

$$P_A + \rho g Z_A + \frac{1}{2} \rho U_A^2 = P_B + \rho g Z_B + \frac{1}{2} \rho U_B^2$$

Compte tenu du rapport de section entre le réservoir et l'orifice, on peut y négliger U_A devant U_B ($U_A \ll U_B$), car la surface du récipient est grande vis-à-vis de celle de la section l'orifice : $U_A \approx 0$. Par ailleurs, le point A étant situé sur la surface libre, on peut admettre que : $P_A = P_B$ pour de petites différences d'altitude. Dans le domaine du jet où se trouve le point B, les lignes de courant sont rectilignes et parallèles et par conséquent la pression motrice P est uniforme sur une même section. En négligeant les variations d'altitude au sein du jet, il s'ensuit que la pression statique est également à peu près uniforme sur une même section. Or, par continuité de la pression à l'interface jet-atmosphère, la pression atmosphérique règne donc en tout point du jet (ce résultat peut être généralisé à toute situation dans laquelle un liquide s'écoule sous la forme d'un jet libre).

Appliquant Bernoulli entre A et B : $P_A + \rho g Z_A + \frac{1}{2} \rho U_A^2 = P_B + \rho g Z_B + \frac{1}{2} \rho U_B^2$

Comme : $P_A = P_B$ et $U_A \approx 0$, l'équation de Bernoulli prend la forme suivante :

$$\Rightarrow P_0 + \rho g Z_A + 0 = P_0 + \rho g Z_B + \frac{1}{2} \rho U_B^2$$

$$\implies \frac{1}{2} \rho U_B^2 = \rho g (Z_A - Z_B) = \rho g H$$

qui, après simplification, permet d'écrire la formule non-uniforme de Torricelli : $U_B = \sqrt{2gH}$

Remarque :

La vitesse d'écoulement du liquide et le temps de vidange sont indépendants de sa masse volumique du liquide ; le seul paramètre dont ils dépendent est donc la hauteur séparant l'orifice de la surface libre du liquide.

Exercice d'application (Cas d'un Siphon) : On considère un siphon de diamètre $d=10$ mm alimenté par un réservoir d'essence de grandes dimensions par rapport d et ouvert l'atmosphère. On suppose que :

- le fluide est parfait.
- le niveau du fluide dans le réservoir varie lentement.
- L'accélération de la pesanteur $g = 9.81m.s^2$.
- le poids volumique de l'essence : $\omega = 6896N/m^3$.
- $H = Z_A - Z_S = 2,5m$.

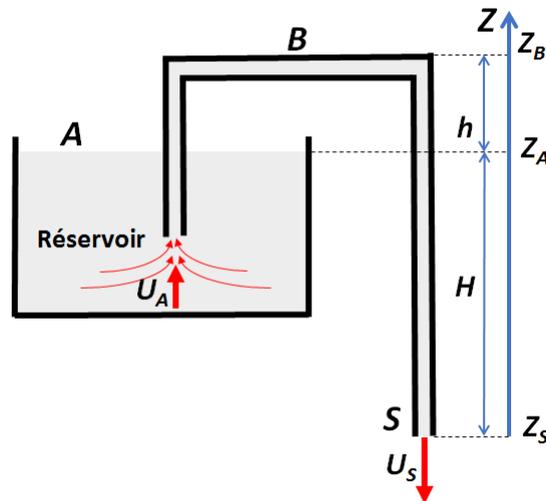


FIGURE 2.11 – Siphon

- 1) En appliquant le Théorème de Bernoulli entre les points A et S, calculer la vitesse d'écoulement V_S dans le siphon.
- 2) En déduire le débit volumique q_V .
- 3) Donner l'expression de la pression P_B au point B en fonction de h , H , et P_{atm} . Calculer P_B pour $h = 0.4m$.
- 4) h peut-elle prendre n'importe quelle valeur ? Justifier votre réponse.

Solution :

1) Appliquant l'équation de Bernoulli entre les points S et A : $\frac{P_S}{\omega} + Z_S + \frac{U_S^2}{2\omega} = \frac{P_A}{\omega} + Z_A + \frac{U_A^2}{2\omega}$

on a : $P_S = P_A = P_{atm}$, $U_A = 0$ et $Z_A - Z_S = H$

$U_S = \sqrt{2gH}$, A.N. : $U_S = \sqrt{2 \times 9.81 \times 2.5} = 7m/s$

2) Le débit volumique : $q_{v/S} = U_S \times S = U_S \times \frac{\pi d^2}{4}$ A.N. : $q_{v/S} = 7 \times \frac{3.14 \times (0.01)^2}{4} = 5.5 \times 10^{-4} m^3/s = 0.55l/s$

3) Théorème de Bernoulli entre B et S : $\frac{P_B}{\omega} + Z_B + \frac{U_B^2}{2\omega} = \frac{P_S}{\omega} + Z_S + \frac{U_S^2}{2\omega}$

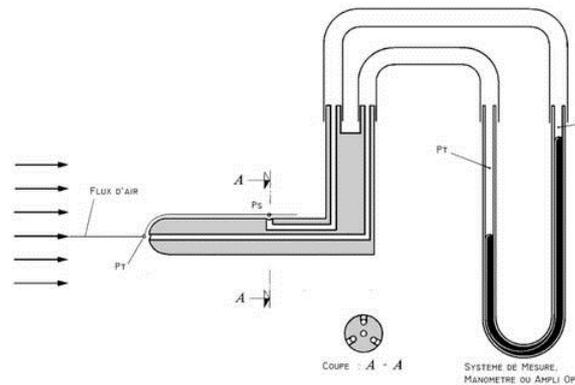
Or : $U_S = U_B$, $Z_B - Z_S = (H + h)$ et $P_S = P_{atm}$

$$P_B = P_{atm} - \omega(H + h) \text{ A.N. : } P_B = 10^5 - 6896 \times (2,5 + 0,4) = 80001,6 Pa = 0,8 bar$$

4) Non ! Il faut que $P_B > 0$

$$\text{Équivaut à : } h < \frac{P_{atm}}{\omega} - H, \text{ A.N. : } h < \frac{10^5}{9.81 \times 700} - 2.5 = 12m.$$

Exercice d'application (tube de Pitot) : Le tube de Pitot, représenté ci-dessus, permet de mesurer la vitesse (ou le débit) d'un fluide dans une canalisation de section S . Le fluide circulant dans la canalisation est animé d'une vitesse U et possède une masse volumique ρ_1 alors que le tube en U est rempli d'un liquide de masse volumique ρ_2 .



Énoncé

FIGURE 2.12 – Tube de Pitot

Le fluide est incompressible ($\rho = Cste$) et parfait ($\mu = 0$). - L'écoulement est permanent ($\partial U / \partial x = 0$).

Nous pouvons donc appliquer la relation de Bernoulli sous la forme :

$$P + \rho g Z + \frac{1}{2} \rho U^2 = Cste$$

- L'ouverture B est dirigée face au jet et constitue un point d'arrêt (la vitesse du fluide en B est nulle, $U_B = 0$).
- $Z_A = Z_B$
- $U_B = U_{B'} = U_{A'} = 0$
- La vitesse dans le tube est nulle (pas de mouvement), ce qui nous laisse écrire en appliquant le principe fondamental de la statique des fluides dans cette partie du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{B'} - P_{A'} = \rho_2 g h \\ P_{A'} - P_A = \rho_1 g (Z_A - Z_{A'}) \\ P_{B'} - P_B = \rho_2 g (Z_B - Z_{B'}) \end{array} \right.$$

$$P_A + \rho_1 g Z_A + \frac{1}{2} \rho_1 U_A^2 = P_B + \rho_1 g Z_B + \frac{1}{2} \rho_1 U_B^2$$

$$\implies P_B = P_A + \frac{1}{2} \rho_1 U_A^2$$

$$P_{A'} - P_A = \rho_1 g (Z_A - Z_{A'})$$

$$P_{B'} - \rho_2 g (Z_B - Z_{B'}) = P_{A'} + \frac{1}{2} \rho_1 U_A^2 - \rho_1 g (Z_A - Z_{A'})$$

$$\implies U_A = \sqrt{2hg \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right)}$$

2.3 Théorèmes de transport

2.3.1 Volumes et surfaces de contrôle

Un volume de contrôle est un volume imaginaire sur lequel on procède au bilan intégral d'une grandeur physique comme la masse, la quantité de mouvement ou encore l'énergie. On appelle surface de contrôle l'enveloppe délimitant un volume de contrôle.

Le fluide peut entrer et sortir d'un volume de contrôle c'est-à-dire traverser la surface de contrôle qui peut elle-même être fixe ou mobile.

Le volume de contrôle peut être sous différentes formes. Il peut être fixe (constant), matériel à volume variable (masse constante), ou encore arbitraire dont le déplacement et la déformation sont différents de ceux du fluide qui le traverse.

2.3.2 Théorème de transport

En Mécanique des Fluides, l'évolution des grandeurs matérielles est analysée à l'aide d'équations intégrales de bilan sur des domaines fluides macroscopiques. Le transport de ces grandeurs dans l'écoulement est explicité en suivant le mouvement; il est par conséquent nécessaire d'établir l'expression de la dérivée particulaire d'une intégrale volumique.

Généralement, un volume de contrôle arbitraire est noté par $Va(t)$ limité par l'enveloppe fermée $Sa(t)$. Soient $f(\vec{x}, t)$ une fonction scalaire continue et dérivable et $I(t)$ son intégrale sur le volume Va .

$$I(t) = \iiint_{Va} f(\vec{x}, t) dV$$

Le taux de variation dans le temps de l'intégrale $I(t)$ est donné par :

$$\frac{d}{dt} I(t) = \frac{d}{dt} \iiint_{Va} f dV = \iiint_{Va(t)} \frac{df}{dt} dV + \iint_{Sa(t)} f(\vec{V}_a \bullet \vec{n}) dS \text{ —————} (*)$$

où \vec{V}_a désigne la vitesse locale de la surface de contrôle et \vec{n} la normale extérieure. La relation précédente (*), est connue sous le nom de la règle de Leibnitz, s'interprète comme suit :

Taux de variation de l'intégrale de $f(\vec{x}, t)$ sur le volume $Va(t)$	=	Intégrale de la variation temporelle de $f(\vec{x}, t)$ sur le volume $Va(t)$	+	Flux de $f(\vec{x}, t)$ à travers l'enveloppe $Sa(t)$
---	---	---	---	---

Chapitre 3

Équations d'Euler (fluides parfaits)

3.1 Rappel de cinématique

La cinématique des fluides est l'étude des mouvements de fluides sans tenir compte des forces exercées sur le fluide. Dans la cinématique, on s'intéresse uniquement à l'étude du champ des vitesses. on trouve deux approches différentes, l'une est de Lagrange (approche Lagrangienne) et l'autre est de Euler (approche Eulérienne).

3.1.1 Approche de Lagrange

Le point de vue Lagrangien, est de suivre l'élément du fluide dans son mouvement, c'à.d. suivre sa position à tout moment ; i.e. connaître les coordonnées du point $M(x,y,z)$ à chaque instant « t ».

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t)}{dt} \quad (3.1)$$

une

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad (3.2)$$

$$\overrightarrow{OM}(t) = \vec{r}(t, \vec{r}_0) \implies \vec{v}(t, \vec{r}_0) = \frac{d}{dt}(\vec{r}(t, \vec{r}_0)) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+dt, \vec{r}_0) - \vec{r}(t, \vec{r}_0)}{dt}$$

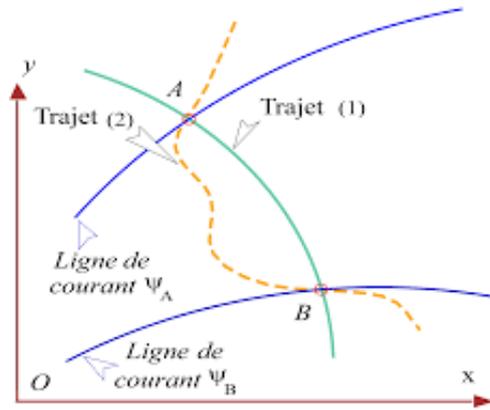


FIGURE 3.1 – Approche de Lagrange

Les lignes de trajectoires représentent les chemins suivis par les particules fluides dans l'espace avec l'évolution du temps, comme l'explique la figure 3.2. Théorèmes de transport

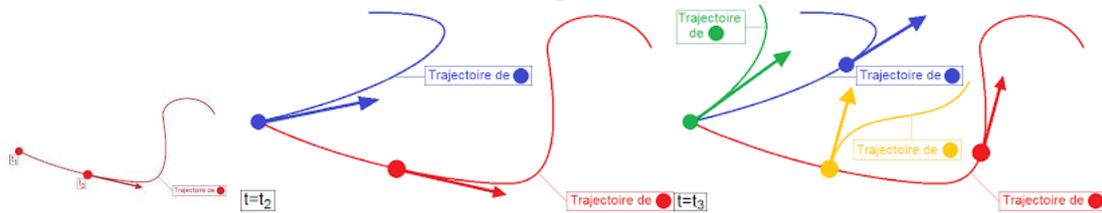


FIGURE 3.2 – Lignes de trajectoires

3.1.2 Approche de Euler

Du point de vue Eulérien, on s'intéresse au champ des vitesses de la particule fluide (élément de volume) en mouvement $\vec{v}(\vec{r}, t)$. L'équation de Euler détermine l'évolution des vitesses dans un volume de fluide. Donc, la question est comment déterminer cette équation ?

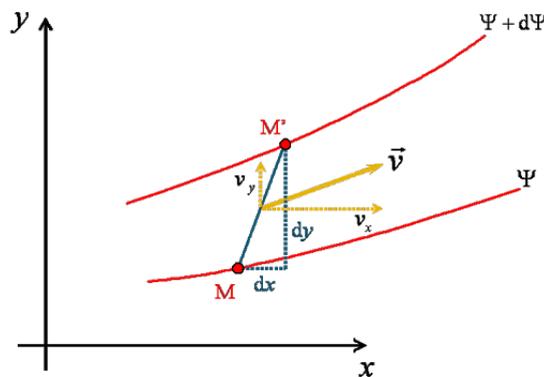


FIGURE 3.3 – Approche Eulérienne

Les lignes de courant représentent des profils de l'espace (courbes), décrivent le fluide

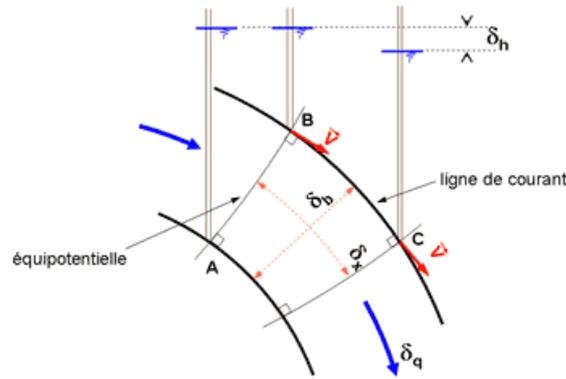


FIGURE 3.4 – lignes de courant

en mouvement et qui, à tout instant, possède en tout point une tangente parallèle à la vitesse des particules de ce fluide.

3.2 Dynamique des fluides parfaits

3.2.1 Notion de dérivée particulaire :

on a l'accélération d'un élément de fluide : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(\vec{r}+d\vec{r}, t+dt) - \vec{v}(\vec{r}, t)}{dt}$

Si on a une fonction $f(x, y, z, t)$, on sait que : $f(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt) = f(x, y, z, t) + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt$

$$\vec{a} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(\vec{r}+d\vec{r}, t+dt) - \vec{v}(\vec{r}, t)}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} dz + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt \right] = \lim_{dt \rightarrow 0} \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right]$$

$$\implies \vec{a} = \lim_{dt \rightarrow 0} \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} v_z + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right] \implies \vec{a} = \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

$$\implies \vec{a} = \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

— **Dérivée particulaire :** $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v}$

C'est la variation temporaire d'une particule fluide, du point de vue Lagrangien, en la suivant dans son mouvement,

avec : d et \vec{r} est le vecteur position.

$$d'où : \quad \frac{d\vec{v}}{dt} \underset{\text{Lagrangien}}{=} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \underset{\text{Eulerien}}{+} \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} \quad (3.3)$$

Donc, l'approche de dynamique des fluides parfaits est basée sur l'étude des écoulements de fluides, tout en considérant les forces extérieures sans prise en compte des forces de frottement (ou forces visqueuses). Les écoulements parfaits sont gouvernés par les équations connues sous le nom des « Équations de Euler ».

3.2.2 Équation d'Euler :

Pour une particule fluide de volume dV et de masse $dm = \rho dV \implies \rho dV \frac{d\vec{v}}{dt} = \Sigma \vec{f}$;

\vec{f} : forces extérieures qui influent sur la particule fluide.

$$\implies \rho dV \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = \Sigma \vec{f} \quad (3.4)$$

Il y a les forces volumiques (poids) et les forces de pression.

poids : $d\vec{f}_{poids} = \rho dV \vec{g}$ et pression : $d\vec{f}_{pression} = -dV \overrightarrow{grad} P$

on peut traiter le cas particulier des forces de poids et de pression, donc on obtient :

$$\begin{aligned} \rho dV \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) &= \Sigma \vec{f} = d\vec{f}_{poids} + d\vec{f}_{pression} \\ \implies \rho dV \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho dV (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} &= \rho dV \vec{g} - dV \overrightarrow{grad} P \implies \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \rho \vec{g} - \overrightarrow{grad} P \end{aligned}$$

$$\implies \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{\text{terme temporaire}} + \underbrace{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}}_{\text{terme convectif}} = \underbrace{\vec{g}}_{\text{terme de gravité}} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \overrightarrow{grad} P}_{\rho \text{ terme pression}} \quad (3.5)$$

(6) --> **C'est la dite équation de Euler (1755).**

Soit une fonction G ; sa dérivée particulière est : $\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) G$
Lagrangien Eulerien

$$\implies \underbrace{\frac{dG}{dt}}_{\text{terme temporaire}} = \underbrace{\frac{\partial G}{\partial t}}_{\text{terme local}} + \underbrace{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) G}_{\text{transport ou terme convectif}}$$

Pour le transport d'une grandeur physique dans l'espace, il y a deux façons présentées par :

→ le terme d'advection (de convection ou convectif).

→ le terme de diffusion (de conduction).

Remarque : Dans la dynamique des fluides, le terme de diffusion est lié aux forces de frottement entre les particules et qui dépend de la viscosité du fluide, appelé aussi le terme visqueux. Ce terme n'apparaîtra pas ici avec Euler), il s'agit du cas d'écoulements réels, qui seront présentés avec les équations de Navier-Stokes dans le dans la chapitre suivant.

3.2.3 Équation de BERNOULLI : (autres approches)

Approche Bernoulli ⇔ Euler :

En partant du principe de thermodynamique, par l'application de la loi de conservation d'énergie sur un volume de contrôle :

$$dE_c = \Sigma \delta W (\vec{f}_{ext}) = \delta W (\vec{f}_{poids}) + \delta W (\vec{f}_{pression}) = \rho g dz - dP$$

$$\text{et d'autre part, on a : } \left[m \frac{d\vec{v}}{dt} = \Sigma \vec{f} \right] . d\vec{r}$$

avec : $d\vec{r}$ le vecteur de déplacement

$$\implies m \frac{d\vec{v}}{dt} . d\vec{r} = \Sigma \vec{f} . d\vec{r}$$

$$\implies m \frac{d\vec{r}}{dt} . d\vec{v} = \Sigma \delta W$$

$$\implies m \vec{v} . d\vec{v} = \Sigma \delta W$$

$$\text{sur l'axe (OZ) : } \implies d \left(\frac{1}{2} m \vec{v}^2 \right) = \Sigma \delta W$$

$$\text{et on a : } \Sigma \delta W = \delta W_{poids} + \delta W_{f,pression} = m \vec{g} d\vec{r} - V \vec{\nabla} P . d\vec{r}$$

$$\text{d'où, on obtient sur l'axe (OZ) : } d \left(\frac{1}{2} \rho V v^2 \right) = -\rho V g dz - V \frac{dP}{dz} . dz$$

$$\implies d \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) = -\rho g dz - dP$$

après intégration, on aura : $\frac{1}{2} \rho v^2 = -\rho g z - P + C$

$$\implies \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z + P = C \text{ --> l'équation de Bernoulli sur l'axe OZ.}$$

on dérive l'équation de Bernoulli, par rapport à (OZ) : $\implies d(\frac{1}{2}v^2) + \frac{1}{\rho}dP - gdz = 0$

$$\begin{aligned} &\implies \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (v^2) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - \vec{g} \right] . dz = 0 \\ &\implies \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} (v^2) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial \vec{r}} \right) - \vec{g} \right] . d\vec{r} = 0 \\ &\implies \left[\frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} (v^2) + \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} P - \vec{g} \right] . d\vec{r} = 0 \\ &\implies \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} (v^2) + \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} P - \vec{g} = 0 \end{aligned}$$

d'après le théorème de Green Ostrogradski : $\frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} v^2 = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v}$

alors ; on peut écrire : $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v} + \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} P - \vec{g} = 0$

$$\implies (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} P$$

pour un fluide irrôationnel $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}$ et instationnaire ($\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \neq 0$) :

$$\implies \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} P \text{ ---c'est l'équation d'Euler}$$

Approche Euler \Leftrightarrow Bernoulli :

Maintenant, on prend la démarche inverse et partant de l'équation d'Euler , on a : $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \vec{g} - \frac{\overrightarrow{\text{grad}} P}{\rho}$

et en utilisant le théorème de GREEN OSTROGRADSKI : $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} v^2 + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v}$

on aura :

$$\implies \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} v^2 + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v} = \vec{g} - \frac{\overrightarrow{\text{grad}} P}{\rho}$$

pour un écoulement incompressible stationnaire ($\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$) et irrôationnel ($\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}$),

l'équation précédente devient :

$$\implies \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} v^2 = \vec{g} - \frac{\overrightarrow{\text{grad}} P}{\rho}$$

et le long d'une ligne de courant, on a : $d\vec{r} = \vec{v} dt$; tel que (\vec{r}) est le vecteur déplacement d'une particule quelconque d'un fluide incompressible. d'où, on peut écrire :

$$\implies \left[\frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} v^2 + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{P}{\rho} \right) - \vec{g} \right] . d\vec{r} = 0$$

$$\implies \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} v^2 + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \left(\frac{P}{\rho} \right) - \vec{g} \right] \cdot d\vec{r} = 0$$

après la projection sur l'axe (OZ) : $\left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} v^2 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g \right] \cdot dz = 0$

$\implies d\left(\frac{1}{2}v^2\right) + \frac{1}{\rho}dP - g dz = 0$; et en intégrant :

$$\implies \frac{1}{2}\rho v^2 + P - g\rho z = C^{ste} \rightarrow \text{équation de Bernoulli sur l'axe OZ}$$

avec : $\vec{g} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{vmatrix}$; $d\vec{r} = \begin{vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{vmatrix} \implies \text{projection sur OZ : } \vec{g} \cdot d\vec{r} \equiv g \cdot dz$

3.2.4 Écoulement irrôtionnel :

Si : $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$ partout , alors :

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + P - g\rho z = C^{ste} (\text{écoulement uni-directionnel})$$

si : un écoulement est irrôtionnel initialement ($\mu = 0$) viscosité négligeable, il restera irrôtionnel dans tout le fluide.

Exercice 1 :

On considère un siphon de diamètre $d = 10$ mm alimenté par un réservoir d'essence de grandes dimensions par rapport à d et ouvert à l'atmosphère. On suppose que :

- le fluide est parfait.
- le niveau du fluide dans le réservoir varie lentement.
- l'accélération de la pesanteur $g = 9.81 m/s^2$.
- le poids volumique de l'essence : $\bar{\omega} = 6896 N/m^3$.
- $H = Z_A - Z_S = 2,5m$.

1) En appliquant le Théorème de Bernoulli entre les points A et S, calculer la vitesse d'écoulement v_s dans le siphon. 2) En déduire le débit volumique q_v .

3) Donner l'expression de la pression P_B au point B en fonction de $h, H, \bar{\omega}$ et P_{atm} . Faire une application numérique pour $h = 0.4m$.

4) h peut elle prendre n'importe quelle valeur ? Justifier votre réponse.

Réponse :

1) Appliquant Bernoulli entre S et A: $\frac{V_S^2}{2g} + Z_S + \frac{P_S}{\bar{\omega}} = \frac{V_A^2}{2g} + Z_A + \frac{P_A}{\bar{\omega}}$,

on a : $P_S = P_A = P_{atm}$, $V_A = 0$ et $Z_A - Z_S = H$

$V_S = \sqrt{2gH}$, A.N.: $V_S = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 2,5} = 7m/s$.

2) Le débit volumique : $q_v = V_S \cdot \frac{\pi d^2}{4}$, A.N.: $q_v = 7 \cdot \frac{\pi(0,01)^2}{4} = 5,5 \cdot 10^{-4} m^3/s = 0,55l/s$.

3) Théorème de Bernoulli entre B et S : $\frac{V_B^2}{2g} + Z_B + \frac{P_B}{\bar{\omega}} = \frac{V_S^2}{2g} + Z_S + \frac{P_S}{\bar{\omega}}$,

Or $V_S = V_B$, $Z_B - Z_S = H + h$ et $P_S = P_{atm}$

$P_B = P_{atm} - \bar{\omega}(H + h)$ A.N.: $P_B = 10^5 - 6896 \cdot (2,5 + 0,4) = 80001,6 Pa = 0,8bar$.

4) Non. Il faut que $P_B > 0$ équivaut à : $h < \frac{P_{atm}}{\bar{\omega}} - H$, A.N.: $h < \frac{10^5}{9,81 \cdot 700} - 2,5 = 12m$.

Chapitre 4

Équation de continuité (conservation de matière)

La matière a une structure discontinue et la notion de milieu continu est une pure notion « schématique ». Elle consiste à admettre que la masse et toutes ses propriétés sont réparties continûment dans le matériau (ce qui n'exclut pas les discontinuités aux interfaces). Bien entendu ce schéma ne prétend représenter que les phénomènes macroscopiques ou mésoscopique dont les échelles caractéristiques sont très grandes devant la distance intermoléculaire moyenne. Comme il n'est pas question d'ignorer complètement les phénomènes dont le siège est à l'échelle moléculaire (comme celui de la diffusion), ceux-ci devront être représentés à travers une description macroscopique (ou mésoscopique) de leurs conséquences à grande échelle. Le concept du continuum présente l'immense avantage d'autoriser le calcul différentiel et intégral dont les outils sont présentés au premier chapitre d'analyse vectoriel.

4.1 Courant de matière

Soit un flux de matière qui traverse une surface élémentaire dS . La quantité de matière traversant dS pendant un temps dt est : $dm = \rho q_V = \rho V \cdot dt \cdot \vec{dS} = \rho \vec{v} \cdot \vec{dS} \cdot dt = \rho \vec{v} \cdot \vec{n}_\perp \cdot dS \cdot dt$
 $\Rightarrow dm = \rho \vec{v} \cdot \vec{dS} \cdot dt$

Par définition : $\vec{j} = \rho \vec{v}$ est la densité de courant de matière (ou de masse).

donc, $\frac{dm}{dt} \Big|_{dS} = \vec{j} \cdot \vec{dS}$

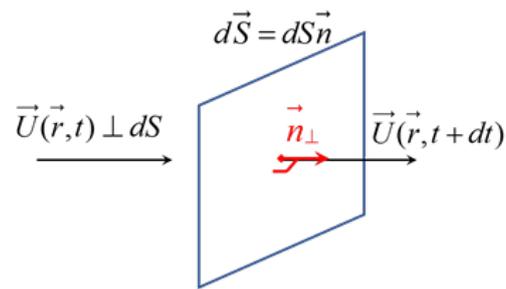


FIGURE 4.1 – Flux de matière

La quantité de matière qui traverse dS (ou dite aussi l'intensité de masse), par analogie au courant électrique : $\frac{dq}{dt} \Big|_{dS} = \vec{j} \cdot \vec{dS} \rightarrow \varphi_{dS} = \vec{j} \cdot \vec{dS}$ (flux).

$$I_{/S} = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS} = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{dS} \quad (4.1)$$

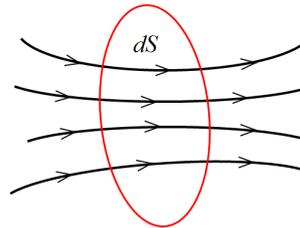


FIGURE 4.2 – Courant de matière

exemple d'une c**Exercice 1** : analyse, le flux de matière est conservé : $I_{/S_1} = q_{m_1} = \frac{dm}{dt} \Big|_{/S_1} = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS}$

$q_{m_1} = q_{m_2}$ [kg/s] : le débit massique est conservé le long d'un tube de lignes de courant (figure 4.3), entre l'entrée (section S_1) et la sortie (section S_2), c'est similaire à une conduite réelle.

Par analogie au circuit électrique, le courant est conservé le long du circuit (figure 4.4).

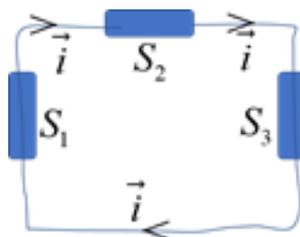


FIGURE 4.4 – Analogie au circuit électrique

Enoncé

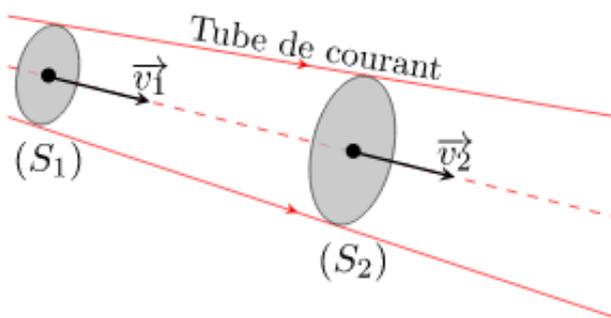


FIGURE 4.3 – Conservation de débit d'une conduite

Un écoulement stationnaire et incompressible, le flux de matière est conservé, comme dans le cas du courant le long d'un dans un fil électrique, et donné par : $I_{/S_1} = I_{/S_2} = I_{/S_i}$.

4.2 Bilan de matière (conservation de masse)

Soit un élément de volume $dx dy dz$: $dm = \rho dV = \rho dx dy dz$

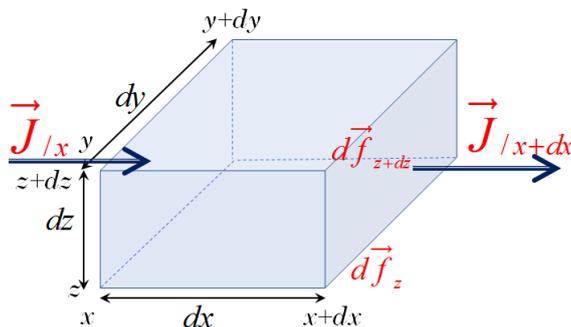


FIGURE 4.5 – Bilan de matière suivant « ox »

Pendant dt la quantité de matière entrante dans l'élément suivant (ox) est : $\vec{j}_{(x)} \cdot dS \cdot \vec{n}_x \cdot dt = \rho \cdot \vec{u} \cdot dy dz \cdot \vec{n}_x \cdot dt$

La quantité qui sort suivant (ox) est : $-\vec{j}_{(x+dx)} \cdot dS \cdot \vec{n}_x \cdot dt = -\rho \cdot \vec{u} \cdot dy dz \cdot \vec{n}_x \cdot dt$

Le bilan de matière sur suivant trois axes :

$$(ox) : \vec{j}_{(x)} \cdot dy dz \cdot \vec{n}_x \cdot dt = -\vec{j}_{(x+dx)} \cdot dy dz \cdot \vec{n}_x \cdot dt = 0$$

$$(oy) : \vec{j}_{(y)} \cdot dx dz \cdot \vec{n}_y \cdot dt = -\vec{j}_{(y+dy)} \cdot dx dz \cdot \vec{n}_y \cdot dt = 0$$

$$(oz) : \vec{j}_{(z)} \cdot dy dx \cdot \vec{n}_z \cdot dt = -\vec{j}_{(z+dz)} \cdot dy dx \cdot \vec{n}_z \cdot dt = 0$$

$$\text{on a : } \vec{j} = \vec{j}_x \cdot \vec{n}_x + \vec{j}_y \cdot \vec{n}_y + \vec{j}_z \cdot \vec{n}_z$$

$$\text{alors : } dm = -dx dy dz \cdot dt \left[\frac{\vec{j}_{(x+dx)} - \vec{j}_{(x)}}{dx} \vec{n}_x + \frac{\vec{j}_{(y+dy)} - \vec{j}_{(y)}}{dy} \vec{n}_y + \frac{\vec{j}_{(z+dz)} - \vec{j}_{(z)}}{dz} \vec{n}_z \right]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow dm &= -dV \cdot dt \left[\frac{\vec{j}(x)}{dx} \vec{n}_x + \frac{\vec{j}(y)}{dy} \vec{n}_y + \frac{\vec{j}(z)}{dz} \vec{n}_z \right] \Rightarrow \frac{dm}{dt} = -dV \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{j} \right) \Rightarrow \frac{d(\rho dV)}{dt} = -dV \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{j} \right) \\ &\Rightarrow \frac{d(\rho)}{dt} = -div \left(\vec{j} \right) = -div \left(\rho \vec{U} \right) \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{d\rho}{dt} + div \left(\rho \vec{U} \right) = 0 \quad (4.2)$$

C'est la dite équation de continuité ou bien dite : « équation de conservation de masse ».

4.3 Flux de matière d'un volume fini "V"

Soit un volume fini de fluide "V" et de surface d'enveloppe $\Sigma(V)$.

$$\text{Donc : } \frac{dM}{dt} = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV ; \text{ avec : } M = \iiint_V \rho dV$$

Par ailleurs, le bilan de matière donne :

$$\text{Flux de matière entrant à travers l'enveloppe } \Sigma : \frac{dM}{dt} = \oint_{\Sigma(V)} \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S}_{in}$$

$$\text{Flux de matière sortant à travers l'enveloppe } \Sigma : \frac{dM}{dt} = \oint_{\Sigma(V)} \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S}_{out}$$

$$\text{D'après le théorème de Green Ostrogradski : } \oint_{\Sigma(V)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iiint_V div \vec{j} \cdot dV$$

$$\text{Si le fluide est incompressible } (\rho = \text{Cste}) \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} + div \left(\vec{j} \right) = 0$$

$$\Rightarrow div \left(\rho \vec{U} \right) = 0$$

$$\Rightarrow div \left(\vec{U} \right) = 0$$

Courant à travers la surface de l'enveloppe fermée (V) est :

$$I_{/\Sigma} = \oint_{\Sigma(V)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iiint_V div \vec{j} \cdot dV = 0$$

Application :

La loi des nœuds (Σ de tout ce qui entre = Σ de tout ce qui sort) à travers la surface de l'enveloppe :

$$\begin{aligned} div \left(\vec{j} \right) = 0 \Rightarrow \oint_{\Sigma(V)} \vec{j} \cdot d\vec{S}_{out} = 0 \Rightarrow \oint_{\Sigma(V)} \vec{j} \cdot d\vec{S}_{out} &= -\iint_{S_1} \vec{j} \cdot d\vec{S}_{flow} + \iint_{S_2} \vec{j} \cdot d\vec{S}_{flow} + \\ \iint_{S_3} \vec{j} \cdot d\vec{S}_{flow} \end{aligned}$$

$\Rightarrow 0 = I_1 + I_2 + I_3 \Rightarrow I_1 = I_2 + I_3$ (c'est la loi de nœuds en électricité).

Par analogie à la loi des nœuds d'électricité, la masse est aussi conservée dans une bifurcation de conduite, qui est considéré comme un nœud.

Selon la loi des nœuds la masse est conservée et le débit aussi, donc la somme des débits entrant est égale à la somme des débits sortant dans le cas de la figure 3.6.

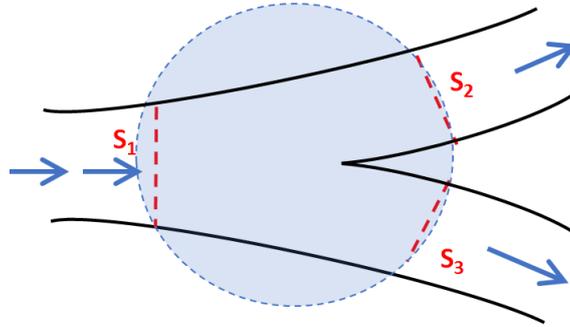
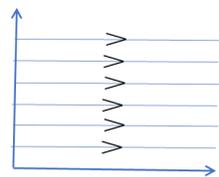


FIGURE 4.6 – Application de la loi des nœuds

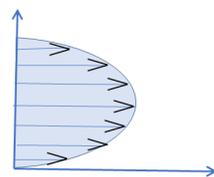
Exemples de divergence " $div(\vec{U})$ " d'écoulement de fluide : la divergence représente la variation de débit entre les lignes de courant pour un écoulement d'un fluide incompressible (figure ci-après).

écol. uniforme



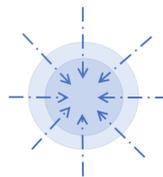
$$div(\vec{U}) = 0$$

écol. laminaire



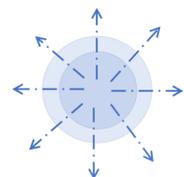
$$div(\vec{U}) = 0$$

source



$$div(\vec{U}) > 0$$

puits



$$div(\vec{U}) < 0$$

FIGURE 4.7 – Exemples de divergence

4.4 Équation de continuité

Rappel : L'équation de continuité traduit le principe de conservation de masse.

Soit un élément de volume $dV = dx dy dz$, sa masse est $dm = \rho dV = \rho dx dy dz$.

Si la matière est conservée, sa variation dans le temps est nulle, pendant un temps « dt » on

$$a : \frac{dm}{dt} = 0$$

$$\text{alors : } \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = \frac{dm}{dt} = \frac{\partial m}{\partial t} dt + \frac{\partial m}{\partial x} dx + \frac{\partial m}{\partial y} dy + \frac{\partial m}{\partial z} dz$$

$$\text{on a : } \frac{dm}{dt} = 0 \Rightarrow 0 = \frac{\partial m}{\partial t} dt + \frac{\partial m}{\partial x} dx + \frac{\partial m}{\partial y} dy + \frac{\partial m}{\partial z} dz$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial x}u + \frac{\partial m}{\partial y}v + \frac{\partial m}{\partial z}w \\ \Rightarrow \frac{\partial m}{\partial t} &= - \left(\frac{\partial m}{\partial x}u + \frac{\partial m}{\partial y}v + \frac{\partial m}{\partial z}w \right); \text{ avec : } m = \rho dV \\ \Rightarrow \frac{\partial \rho dV}{\partial t} &= - \left(\frac{\partial \rho dV}{\partial x}u + \frac{\partial \rho dV}{\partial y}v + \frac{\partial \rho dV}{\partial z}w \right) \\ \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t}dV &= - \left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right) dV \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right) \quad (4.3)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) + \sum \rho q_v$$

avec : $q_v > 0$ cas de source et $q_v < 0$ cas puits.

- écoulement permanent (stationnaire) : $\frac{\partial}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) = \sum \rho q_v$
- écoulement incompressible : $\rho = C^{ste} \rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) = \rho \sum q_v \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = \sum q_v$.
- écoulement conservatif et incompressible : $\sum q_v = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0$ (ni puits, ni source)

Exercice 1 : Soit un écoulement dont le potentiel des vitesses est donné par :

$$\varphi(x, y) = x^2 - 2y - y^2, \text{ avec : } \vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\varphi = \vec{\nabla}\varphi$$

- Démontrer que l'écoulement est : bidimensionnel, permanent et incompressible (vérifiant l'équation de continuité) ?

Exercice 2 : L'équation de la continuité pour l'écoulement permanent isovolume est-elle vérifiée ? si les composantes de la vitesse sont les suivantes pour les deux cas (a) et (b) :

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} u = 2x^2 - xy + z^2 \\ v = x^2 - 4xy + y^2 \\ w = -2xy - yz + y^2 \end{array} \right.$$

$$\text{b) } \left\{ \begin{array}{l} u = (2x - 3y)t \\ v = (x - 2y)t \\ 0 \end{array} \right.$$

Chapitre 5

Équations de Navier-Stokes (fluides réels)

5.1 Généralités et définitions

L'étude des écoulements réels (visqueux) est gouvernée par l'équation dite équation de Navier-Stokes :

$$\rho \frac{d\vec{U}}{dt} = -\vec{\nabla} P + \mu \Delta \vec{U} + \rho \vec{g} \quad \text{---} \rightarrow \text{équation de Navier - Stokes} \quad (5.1)$$

En pratique, la solution analytique de cette équation est impossible. Généralement, on pose des hypothèses simplificatrices et on procède aux solutions numériques basées sur des méthodes numériques (différences finies, volumes finis, éléments finis...etc). Dans toutes les situations, les forces de frottements ont un grand rôle, ou la viscosité n'est plus négligeable (fluide réel), ce qui fait la différence avec un fluide parfait.

5.2 Régime d'écoulement

Dans la pratique, parmi les effets de viscosité, on retrouve le changement de la nature et du comportement d'écoulement avec l'accélération (vitesse) sous l'effet des forces visqueuses.

Ce qui caractérise ce qu'on l'appelle régime d'écoulement. O. Reynolds a réalisé une étude systématique du régime d'écoulement en fonction des différents paramètres intervenant (débit, viscosité, dimension de géométrie ... etc). Il a montré que le régime dépend d'une grandeur sans dimension $Re = \frac{U\rho\ell}{\mu}$, appelé « Nombre de Reynolds », qui regroupe les grandeurs dimensionnelles suivantes : la vitesse d'écoulement (U), la masse volumique (ρ), la viscosité dynamique (μ) et la longueur caractéristique de la géométrie (ℓ). D'un point de vue sens physique, ce nombre adimensionnel, caractérise le rapport des forces d'inertie sur les forces visqueuses.

5.3 Tenseur de contraintes

On a un point M qui appartient à une surface dS , la force de surfacique (de pression), s'exprime : $d\vec{F} = -\vec{n}PdS$, qui est normale à la surface dS .

Pour une contrainte quelconque, on a : $d\vec{F} = -\vec{T}_n dS$.

Soit la norme de cette surface : $\vec{n}_\perp = n_x \vec{i} + n_y \vec{j} + n_z \vec{k}$

et dans ce cas : $\vec{T}_n = T_x \vec{n}_x + T_y \vec{n}_y + T_z \vec{n}_z$

Les projections de cette contrainte surfacique sur les surfaces \perp aux axes, soient :

— la projection de dS sur le plan \perp à X est : $\vec{T}_x = \sigma_{xx} \vec{i} + \tau_{yx} \vec{j} + \tau_{zx} \vec{k}$

— la projection de dS sur le plan \perp à Y est : Équation des moments $\vec{T}_y = \tau_{xy} \vec{i} + \sigma_{yy} \vec{j} + \tau_{zy} \vec{k}$

— la projection de dS sur le plan \perp à Z est : $\vec{T}_z = \tau_{xz} \vec{i} + \tau_{yz} \vec{j} + \sigma_{zz} \vec{k}$

Alors : $\vec{T}_n = T_x \vec{n}_x + T_y \vec{n}_y + T_z \vec{n}_z = (\sigma_{xx} \vec{i} + \tau_{yx} \vec{j} + \tau_{zx} \vec{k}) \vec{n}_x + (\tau_{xy} \vec{i} + \sigma_{yy} \vec{j} + \tau_{zy} \vec{k}) \vec{n}_y + (\tau_{xz} \vec{i} + \tau_{yz} \vec{j} + \sigma_{zz} \vec{k}) \vec{n}_z$

on peut écrire sous forme matricielle : $\vec{T}_n = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{T}_n = \overline{\overline{T}} \cdot \vec{n}$

--> c'est le tenseur des contraintes.

d'où : on peut le décomposer par la sommation de deux matrices, un tenseur sphérique et un autre de trace nulle.

$$\Rightarrow \bar{\bar{T}} = \alpha \bar{\bar{I}} + \bar{\bar{T}}' \text{ teq } : \bar{\bar{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \bar{\bar{T}}' = \begin{bmatrix} \sigma'_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma'_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma'_{zz} \end{bmatrix} \rightarrow \text{c'est le tenseur des}$$

contraintes visqueuses.

$$\text{avec : } \begin{cases} \sigma_{xx} = \alpha + \sigma'_{xx} \\ \sigma_{yy} = \alpha + \sigma'_{yy} \\ \sigma_{zz} = \alpha + \sigma'_{zz} \end{cases} \text{ et } \sigma'_{xx} + \sigma'_{yy} + \sigma'_{zz} = 0 = -3\alpha + \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} \bar{\bar{T}} + \sigma_{zz}) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3} Tr(\bar{\bar{T}})$$

$$\text{On écrit : } \vec{T}_n = \bar{\bar{T}} \cdot \vec{n} = \alpha \bar{\bar{I}} \cdot \vec{n} + \bar{\bar{T}}' \cdot \vec{n} = \alpha \cdot \vec{n} + \bar{\bar{T}}' \cdot \vec{n}$$

donc : $d\vec{F} = \vec{T}_n \cdot dS = \alpha \cdot \vec{n} \cdot dS + \bar{\bar{T}}' \cdot \vec{n} \cdot dS = -P \cdot \vec{n} \cdot dS + \bar{\bar{T}}' \cdot \vec{n} \cdot dS$ (où : le 1^{er} terme présente les forces de pression hydrostatique).

d'où : $P = \frac{1}{3} Tr(\bar{\bar{T}})$ et $Tr(\bar{\bar{T}}') = 0$ avec : $\alpha = -P$ c'est la pression hydrostatique.

5.4 Équation de Navier-Stokes

5.4.1 Notion du tenseur de déformation

Il faut voir aussi le tenseur de déformation « $\bar{\bar{G}}$ » ?

soit un élément de fluide « dV » en déplacement de M vers M' , le champ de vitesses dérive de ce qui suit :

$$\vec{V}' = \vec{V} + d\vec{V} = \vec{V}(\vec{r}' + d\vec{r}') = \vec{V}(\vec{r}') + \vec{V}'(d\vec{r}') \text{ et on écrit :}$$

$$\begin{cases} u' = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ v' = v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \\ w' = w + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \end{cases} \text{ — Équation des moments}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

on note :

$$\overline{\overline{G}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$\overline{\overline{G}}$: est la matrice Jacobienne ou le Jacobien

$$\implies \vec{V}(\vec{r} + d\vec{r}) = \vec{V}(\vec{r}) + \overline{\overline{G}}.d\vec{r}$$

On appelle $\overline{\overline{G}}$ le tenseur de déformation, qui représente quatre types de déformation (translation pure, élongation/contraction, déformation angulaire et rotation pure), comme présenté sur la figure ci-contre.

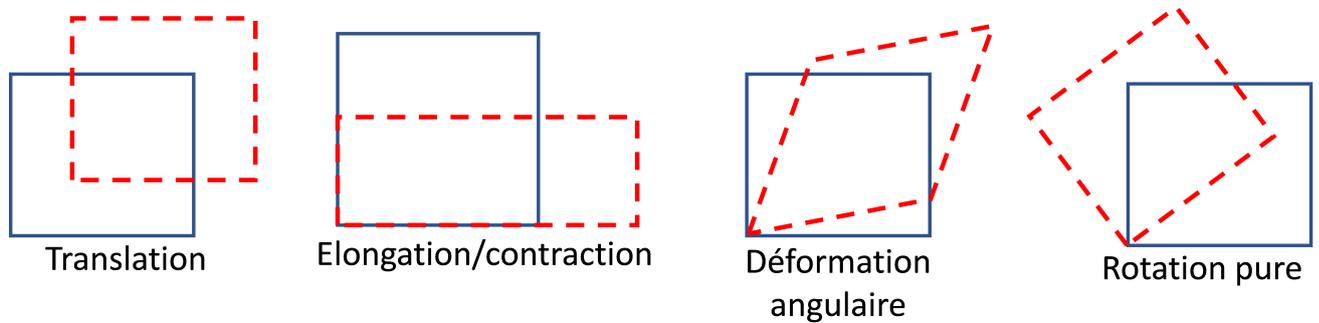


FIGURE 5.1 – Cas de déformations

5.4.2 Décomposition du tenseur de déformation

on écrit : $\overline{\overline{G}} = \overline{\overline{e}} + \overline{\overline{w}}$

$$\text{avec : } \overline{\overline{e}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad \text{c'est un tenseur symétrique}$$

$$\text{et } \overline{\overline{w}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) & 0 \end{bmatrix} \quad \text{est un tenseur anti-symétrique.}$$

$$\text{On note : } \overline{\overline{w}} = \begin{bmatrix} 0 & \overline{\overline{G}}(d\vec{r}) - \Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{teq} : \overline{\overline{w}} \cdot d\vec{r} &= \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \overline{\overline{w}} \cdot d\vec{r} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z dy & \Omega_y dz \\ \Omega_z dx & 0 & -\Omega_x dz \\ -\Omega_y dx & \Omega_x dy & 0 \end{bmatrix} = \vec{\Omega} \wedge d\vec{r} \end{aligned}$$

Remarque : On définit le mouvement et la déformation d'une particule fluide en termes de simple translation, élongation/contraction, déformation angulaire et rotation pure, tout en développant l'expression de variation de vitesse ($d\vec{V}$) :

$$\begin{aligned} &= \vec{V}(\vec{r}) + \underbrace{\overline{\overline{G}} \cdot d\vec{r}}_{d\vec{V}} = \vec{V}(\vec{r}) + \overline{\overline{e}} \cdot d\vec{r} + \overline{\overline{w}} \cdot d\vec{r} \\ &\Rightarrow \vec{V}(\vec{r} + d\vec{r}) = \underbrace{\vec{V}(\vec{r})}_{\text{translation}} + \underbrace{\overline{\overline{e}} \cdot d\vec{r}}_{\text{déformation}} + \underbrace{\vec{\Omega} \wedge d\vec{r}}_{\text{rotation pure}} \end{aligned}$$

5.4.3 Équation de Navier-Stokes

Par définition d'un fluide est dit « Newtonien », on a le tenseur de contraintes visqueuses $\overline{\overline{T}}$ qui dépend linéairement du tenseur de déformation « $\overline{\overline{e}}$ ».

$\overline{\overline{e}}$ est symétrique $\rightarrow e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \Rightarrow e_{ij} = e_{ji}$

On a la relation entre les éléments du tenseur $\overline{\overline{T}}$ et $\overline{\overline{e}}$

pour un fluide isotrope :

$$\sigma'_{ij} = 2\mu e_{ij} + \mu' (e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}) \delta_{ij} \rightarrow (*)$$

avec, δ_{ij} : symbole Kronecker et $\delta_{i=j} = 1$ et $\delta_{i \neq j} = 0$

μ : viscosité dynamique.

μ' : viscosité de dilatation.

Les éléments diagonaux du tenseur « e_{ij} » ne sont que la divergence de la vitesse,

c'est à dire : $e_{11} + e_{22} + e_{33} = \sum_{i=1}^3 e_{ii} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \nabla \cdot \vec{V}$

pour un fluide incompressible : $\nabla \cdot \vec{V} = 0$,

donc l'équation (*) devient : $\sigma'_{ij} = 2\mu e_{ij}$

car : $e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = 0$

Alors, les éléments de $\overline{\overline{T}}$ et $\overline{\overline{e}}$ sont directement proportionnels et le coefficient de proportionnalité est la viscosité dynamique du fluide.

$$\text{d'où : } \overline{\overline{T}} = 2\mu \overline{\overline{e}}$$

D'après la seconde loi de la dynamique (Newton) et avec l'hypothèse de fluide Newtonien, incompressible et isotrope :

$$\begin{aligned} \text{on a : } \Sigma \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a} &\Rightarrow -dV \vec{\nabla} P + dV \vec{\nabla} \overline{\overline{T}} + \rho dV \vec{g} = \rho dV \frac{d\vec{V}}{dt} \\ &\Rightarrow -\vec{\nabla} P + 2\mu \vec{\nabla} \overline{\overline{e}} + \rho \vec{g} = \rho \frac{d\vec{V}}{dt} \end{aligned}$$

et comme $\vec{\nabla} \overline{\overline{e}}$ est la notation compacte du tenseur de déformation, qui est égale à :

$$\vec{\nabla} \overline{\overline{e}} = \sum_i \left(\sum_j \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j} \right) \cdot \vec{e}_i = \sum_i \left[\sum_j \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \right] \cdot \vec{e}_i$$

$$\text{Enoncé} \Rightarrow \vec{\nabla} \overline{\overline{e}} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) \cdot \vec{e}_i = \frac{1}{2} \sum_i \left(\sum_j \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j^2} \right) \cdot \vec{e}_i + \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \left(\sum_j \frac{\partial V_j}{\partial x_j} \right) \cdot \vec{e}_i$$

le second terme est nul : $\frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \left(\sum_j \frac{\partial V_j}{\partial x_j} \right) \cdot \vec{e}_i = 0$;

car la divergence de vitesse est nulle pour un écoulement incompressible :

$$\left(\sum_j \frac{\partial V_j}{\partial x_j} = \nabla V_j = 0 \right).$$

et le premier terme est égale à Laplacien de vitesse :

$$\sum_j \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j^2} = \Delta V_j$$

donc : $\vec{\nabla} \overline{\overline{e}} = \frac{1}{2} \sum_i \left(\sum_j \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j^2} \right) \cdot \vec{e}_i = \frac{1}{2} \sum_i (\Delta V_j) \cdot \vec{e}_i$

et pour un fluide incompressible : $\nabla V_j = 0$, alors :

$$\vec{\nabla} \overline{\overline{e}} = \frac{1}{2} \sum_i (\Delta V_j) \cdot \vec{e}_i = \frac{1}{2} \Delta \vec{V}$$

Donc, l'équation de la 2nd loi fondamentale de la dynamique s'écrira :

$$-\vec{\nabla} P + \mu \Delta \vec{V} + \rho \vec{g} = \rho \frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$-\vec{\nabla} P + \mu \Delta \vec{V} + \rho \vec{g} = \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho \left(\vec{V} \vec{\nabla} \right) \vec{V} \rightarrow \text{C'est l'équation de Navier-Stokes}$$

$$\text{avec : } \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V} \vec{\nabla} \right) \vec{V}$$

Donc, la projection de l'équation de Navier-Stokes sur les trois axes, on obtient le système d'équations en coordonnées cartésiennes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \rho g \end{array} \right. \quad (5.3)$$

Le système d'équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques,

$$\text{avec : } \vec{u} = (u_r, v_\theta, w) \text{ et } \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial u_r}{\partial t} + \rho \left[u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + v_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right) + w \frac{\partial u_r}{\partial z} \right] = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] \\ \rho \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \rho \left[u_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r} \right) + w \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \\ \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \rho g \end{array} \right. \quad (5.4)$$

Le système d'équations de Navier-Stokes en coordonnées sphérique,

$$\text{avec : } \vec{u} = (u_r, u_\theta, u_\varphi) \text{ et } \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = 0$$

Sur l'axe r :

$$\rho \frac{\partial u_r}{\partial t} + \rho \left[u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\theta^2}{r} - \frac{u_\varphi^2}{r} \right] = -\frac{\partial P}{\partial r} + f_r$$

$$+ \mu \left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2u_\theta \cot \theta}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right]$$

Sur l'axe θ :

$$\rho \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \rho \left[u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_r u_\theta}{r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi^2 \cot \theta}{r} \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + f_\theta$$

$$+ \mu \left[\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right]$$

Sur l'axe φ :

$$\rho \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + \rho \left[u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_r u_\varphi}{r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} + \frac{u_\varphi u_\theta \cot \theta}{r} + \frac{u_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right] = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + f_\varphi$$

$$+ \mu \left[\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \right]$$

5.5 Pertes des charges (application aux fluides réels)

Il existe deux types de pertes de charges, les pertes de charges linéaires liées à la longueur et les pertes singulières liées aux changements de formes du circuit de l'écoulement du fluide (variation des sections de passage du fluide).

5.6 Pertes de charge linéaires

Les pertes de charge linéaires s'expriment par l'équation (1) donnée Équation des moments en fonction du coefficient de pertes de charge linéaire (λ) :

$$J_{L12} = -\lambda \frac{v^2}{2g} \left(\frac{D}{L} \right) \quad (5.5)$$

avec :

D : Diamètre hydraulique,

L : Longueur de canalisation,

v : vitesse moyenne d'écoulement,

g : accélération de pesanteur,

λ : coefficient de perte de charge linéaire, qui est lié aussi au coefficient de frottement (f : friction factor), donné par l'équation ci-après :

$$f = \frac{\lambda}{4}$$

et $f = \frac{2\tau}{\rho v^2}$ avec : $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial n}$ n : normale à la direction d'écoulement.

λ n'est fonction que du nombre de Reynolds et de la rugosité relative de la paroi (ε/D), qui peut être obtenue du diagramme de Moody.

On distingue différents cas :

- Si $Re < 2300$: Cas du régime laminaire, appelé aussi droite de Poiseuille, où λ n'est fonction que du nombre de Re :

$$\lambda = \frac{Re}{64}$$

- si $2300 < Re < 10000$: cas d'écoulement turbulent et paroi lisse, où λ dépend encore que de Re et on utilise la droite de Blasius :

$$\text{Équation des moments } \lambda = 0.316 \times Re^{-0.25}$$

ou encore l'équation de Van Karman : $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log (Re \sqrt{\lambda}) - 0.8$

qui se résout par méthode itérative (Newton) avec : $\lambda_0 = 0.02$ comme solution initiale.

- Si $Re > 10000$: Cas de régime d'écoulement turbulent et rugueux, alors λ ne dépend plus du nombre de Reynolds. D'après le diagramme de Moody, en très peu de cas la courbe ε/D est presque une droite horizontale. Pour les calculs industriels, on utilise la relation de Blench :

$$\lambda = 0.790 \sqrt{\frac{\varepsilon}{D}} \rightarrow \text{équation de Blench}$$

Remarque : pour les conduites expérimentales de rugosité uniforme, on utilise la relation de Karman Nikuradse :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log \left(\frac{D}{2\varepsilon} \right) + 1.74$$

Loi générale du coefficient de pertes de charge en régime turbulent et paroi lisse ou rugueuse, ainsi que pour le transitoire. Colebrook et White ont regroupé les lois de Prandtl et Karman, en proposant l'équation suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{2.51}{Re \sqrt{\lambda}} + \frac{\varepsilon}{3.71D} \right)$$

5.6.1 Application (mesure de la viscosité) :

Dans un large réservoir, on place un liquide de masse volumique ρ . On fixe au fond du récipient un long tube fin horizontal (longueur L rayon R); les forces de viscosités sont prépondérantes ici, l'écoulement est très lent (goutte à goutte). La mesure du débit permet de calculer la viscosité μ .

En appliquant Bernoulli, dans le réservoir (les forces de viscosité n'interviennent pas là) on obtient :

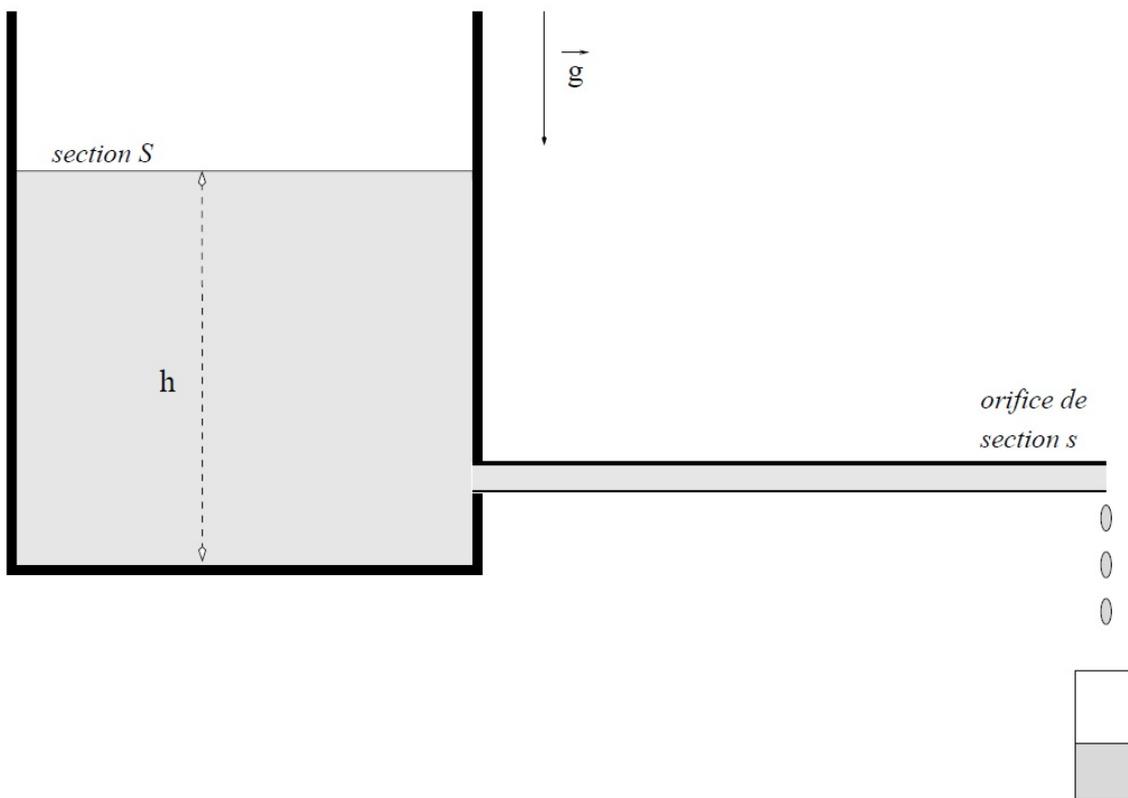


FIGURE 5.2 – Mesure de la viscosité

$$\Delta P = \rho gh - \frac{1}{2}\rho v^2 \approx \rho gh.$$

La loi de poiseuille donne : $Q = \frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{\rho gh}{L} \Rightarrow \mu = \frac{\pi R^4}{8Q} \frac{\rho gh}{L}$

par exemple, pour l'huile de masse volumique $\rho = 860 \text{ kg/m}^3$, $h = 0.3 \text{ m}$, $R = 2 \text{ mm}$, $L = 0.15 \text{ m}$ et on mesure un débit : $Q = 53 \text{ ml/min}$. D'où :

$$\mu = \frac{\pi (2 \cdot 10^{-3})^4}{8 \times (53 \cdot 10^{-6} / 60)} \frac{860 \times 9.81 \times 0.3}{0.15} = 0.12 \text{ [kg/m}^2 \cdot \text{s]} = 0.12 \text{ [Pa} \cdot \text{s]}$$

5.7 Pertes de charge singulières

Ce type de pertes de charge est lié à des accidents ponctuels (changement de forme de tuyauteries), par exemple l'élargissement et le rétrécissement brusques ou progressifs, coudes, formes « U, T et Y », vannes, robinets, clapets ...etc.

Elles s'expriment à partir d'un coefficient de pertes de charge adimensionnel noté par « e » et donnée par la formule suivante :

$$J_{S12} = -e \frac{v^2}{2g}$$

avec :

e : coefficient des pertes de charge singulière,

v : vitesse moyenne d'écoulement à la section de passage considérée,

g : accélération de pesanteur,

Le coefficient « e » est déterminé explicitement pour quelques cas (ou bien par formule empiriques), ou encore par des abaques. on peut retenir quelques exemples des cas ci-après :

- Élargissement brusque : $e = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2$
- Rétrécissement brusque : $e = 0.45 \times \left(1 - \frac{S_2}{S_1}\right)^2$
- Tube plongeant dans un bac : $e = 1$
- Coude 90° : $e = 0.8$
- Vanne ouverte : $e = 1.2$

5.7.1 Coefficient de contraction :

L'évaluation du débit de vidange nécessite de prendre en compte la contraction du jet. Comme le montre l'encart de la figure (..) , la vitesse évaluée précédemment correspond à une section plus faible que celle de l'orifice. En conséquence, le débit volumique de vidange s'obtient en calculant : $q_v = U_B \times S_B$

où S_B est la section du jet où les lignes de courant peuvent être considérées rectilignes et parallèles. On peut ainsi définir un coefficient de contraction $C_c = S_B/S$, lequel dépend essentiellement du type de paroi ainsi que du profil de l'orifice dans la paroi. On peut alors reformuler le débit de vidange ainsi : $q_v = U_B \times S \times C_c$

Exemple : Les figures ci-après donnent de manière non exhaustive quelques valeurs typiques du ce coefficient de contraction.

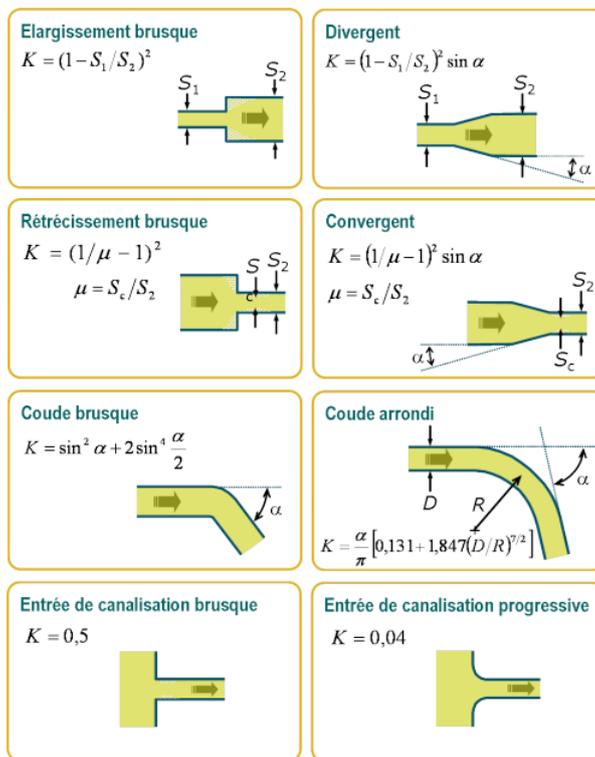


FIGURE 5.3 – Coefficient de contraction [5]

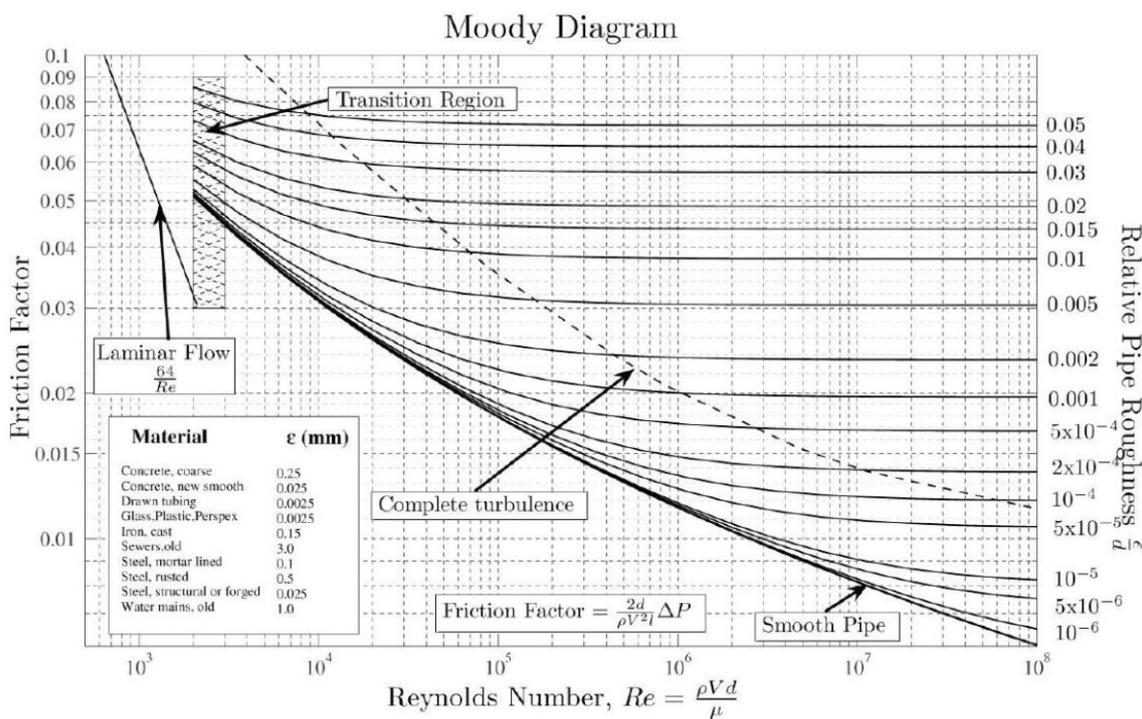


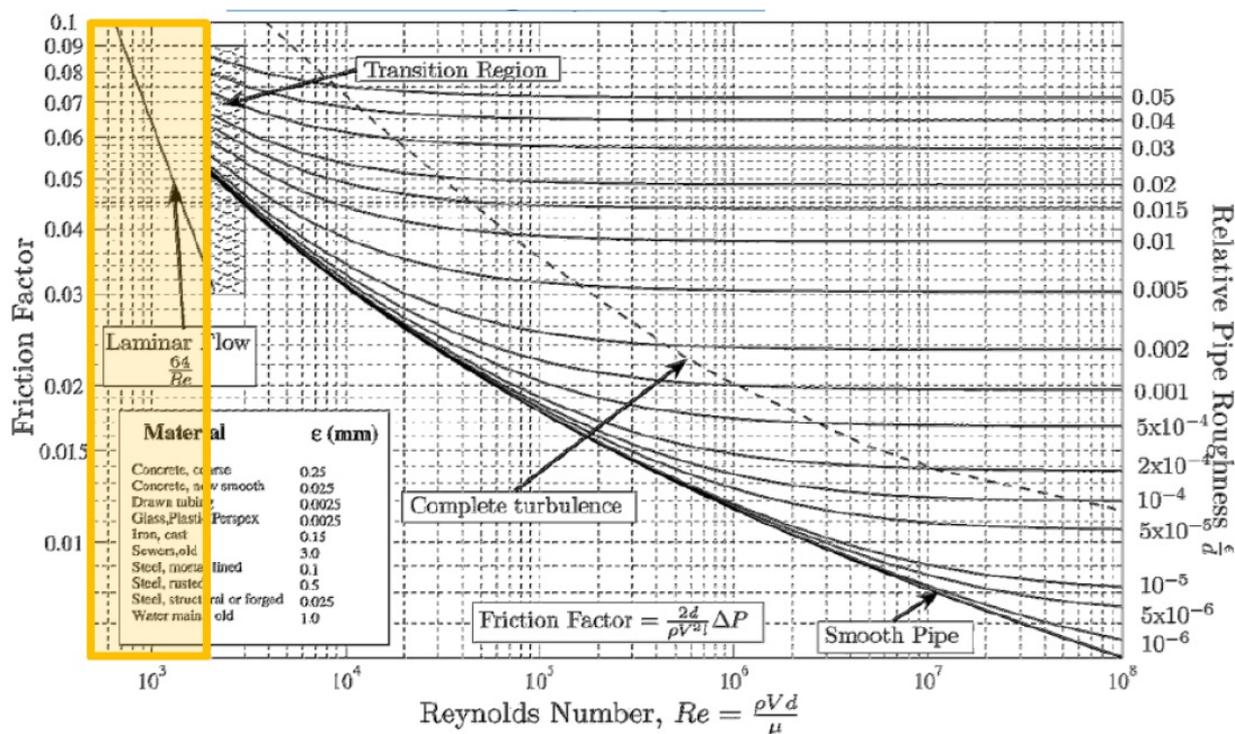
FIGURE 5.4 – Diagramme de Moody[5]

5.7.2 Diagramme de Moody

Présentation et lecture du diagramme :

Utilisation en régime laminaire :

Le coefficient se lit directement à partir de la droite $64/Re$, (voir figure ci-dessous).



Le coefficient se lit directement à partir de la droite 64/Re

FIGURE 5.5 – Régime laminaire

Utilisation en régime turbulent :

Le coefficient se lit directement à partir de la zone délimitée par les deux profils en rouge, (voir figure ci-dessous).

On calcule la rugosité relative ϵ et on sélectionne la courbe correspondante 0.02 ou $5 \cdot 10^{-4}$ (ici, dans la figure ci-après). On détermine le nombre de Reynolds et on lit à l'intersection de la courbe et de la verticale

- On voit qu'au-delà de la courbe « Complète turbulence », le coefficient ne dépend plus que de la rugosité et est indépendant du nombre de Reynolds.
- La ligne « Smooth Pipe » correspond à la limite du diagramme en régime turbulent : les conduites ne sont plus rugueuses sur cette ligne.

On peut se demander quelle zone du diagramme est intéressante pour les écoulements habituels dans les conduites horizontales : Si on fixe Re à 2000 (valeur critique laminaire – turbulent), on peut calculer les vitesses critiques v^* , au-delà desquelles le régime est turbulent :

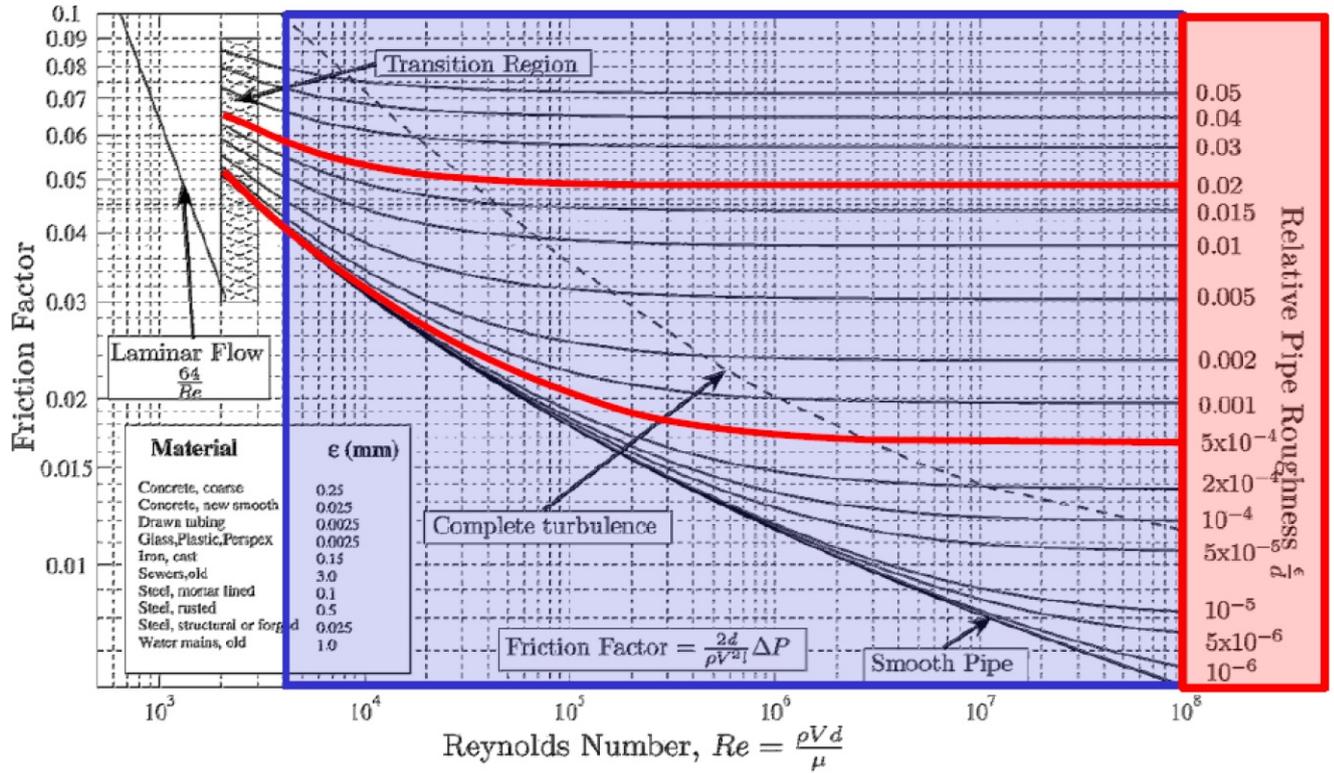


FIGURE 5.6 – Régime turbulent - a

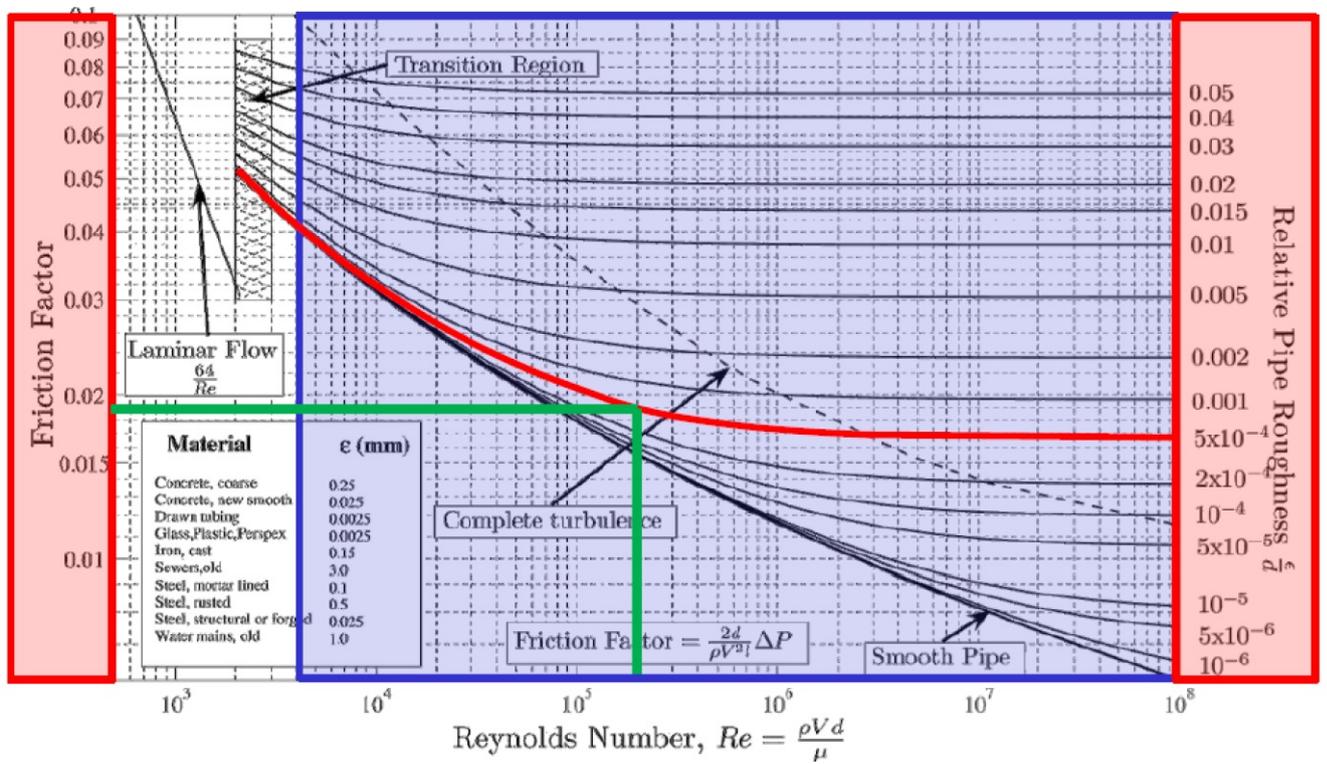


FIGURE 5.7 – régime turbulent - b

$$V > v^* = 2000 \cdot \nu / D$$

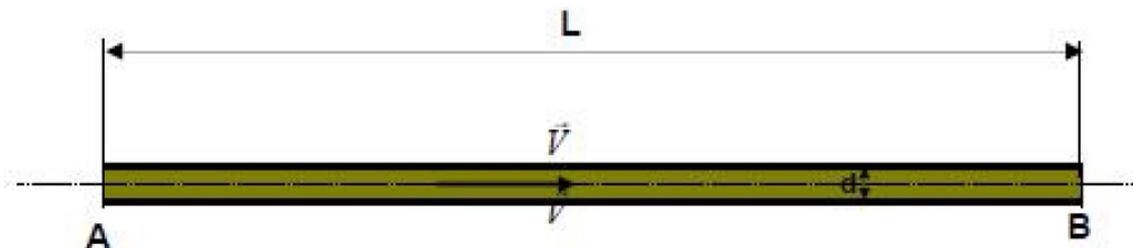
où : ν est la viscosité cinématique du fluide.

<i>vitesse critique de l'eau [m/s]</i>				
t	ν	1/2"	1"	2"
[°C]	[m ² /s]	16,4 mm	27,4 mm	53,2 mm
10°C	$1,30 \cdot 10^{-6}$	0,16	0,09	0,05
50°C	$0,54 \cdot 10^{-6}$	0,07	0,04	0,02
80°C	$0,39 \cdot 10^{-6}$	0,05	0,03	0,01

On voit bien que les vitesses critiques sont très inférieures aux vitesses usuellement rencontrées donc les régimes seront toujours turbulents.

Exercice d'application :

Un pipe-line de diamètre $d = 25\text{cm}$ est de longueur L est destiné à acheminer du pétrole brut d'une station A vers une station B avec un débit massique $q_m = 18\text{kg/s}$.



Les caractéristiques physiques du pétrole sont les suivantes :

- masse volumique $\rho = 900\text{kg/m}^3$,
- viscosité dynamique $\mu = 0,261\text{Pa}\cdot\text{s}$.

On suppose que le pipe-line est horizontal.

- 1) Calculer le débit volumique q_v du pétrole.
- 2) Déterminer sa vitesse d'écoulement \vec{V} .
- 3) Calculer le nombre de Reynolds Re .
- 4) Quelle est la nature de l'écoulement ?

5) Calculer la valeur du coefficient des pertes de charge linéaire.

6) Exprimer la relation de Bernoulli entre A et B.

Préciser les conditions d'application et simplifier.

7) Déterminer la longueur L maximale entre deux stations A et B à partir de laquelle la chute de pression ($\Delta P = P_A - P_B$) dépasse 3 bar.

Réponse :

1) Débit volumique : $q_v = \frac{q_m}{\rho}$, A.N.: $q_v = \frac{18}{900} = 0,02 m^3/s$

2) Vitesse d'écoulement : $V = \frac{4q_v}{\pi \cdot d^2}$, A.N.: $V = \frac{4 \cdot 0,02}{\pi \cdot (0,25)^2} = 0,407 m/s$

3) Nombre de Reynolds : $R = \frac{V \cdot d}{\left(\frac{\mu}{\rho}\right)}$, A.N.: $R = \frac{0,407 \cdot 0,25}{\left(\frac{0,269}{900}\right)} = 350,862$

4) $Re < 2000$: il s'agit d'un écoulement laminaire.

5) Coefficient de perte de charge linéaire : $\lambda = \frac{64}{Re}$, A.N.: $\lambda = \frac{64}{350,862} = 0,1824$

6) Equation de Bernoulli : $\frac{1}{2}(V_B^2 - V_A^2) + g(Z_B - Z_A) + \frac{1}{\rho}(P_B - P_A) = J_L$

Conditions d'application : $V_B = V_A$, $Z_B = Z_A$

Equation de Bernoulli simplifié : $\frac{1}{\rho}(P_B - P_A) = J_L$

7) Calcul de la longueur de la conduite : $\frac{1}{\rho}(P_B - P_A) = J_L$ avec : $J_L = -\lambda \frac{V^2}{2} \left(\frac{L}{d}\right)$

Donc: $L = \frac{2d \cdot (P_B - P_A)}{\lambda \cdot \rho \cdot V^2}$,

A.N.: $L = \frac{2 \cdot 0,25 \cdot 3 \cdot 10^5}{0,1824 \cdot 900 \cdot (0,407)^2} = 5516,137m$

Chapitre 6

Analyse dimensionnelle et similitude

6.1 Introduction

Les méthodes analytiques (ou modèles) utilisées pour résoudre les problèmes de mécanique des fluides ne sont pas toujours satisfaisantes dans la pratique (souvent des simplifications sont nécessaires ou des analyses détaillées coûteuses sont indispensables). La méthode alternative est d'utiliser l'expérience et d'en déduire des corrélations applicables à l'ensemble des cas de problèmes du même type. Comme les conditions des expériences effectuées au laboratoire peuvent être différentes d'un cas réel à l'autre (par exemple, les dimensions de la maquette d'un avion et du prototype, les fluides différents...).

La solution adéquate est d'utiliser une méthode d'analyse dimensionnelle qui permet de d'obtenir des corrélations sans dimensions, applicables dans des conditions pratiques de façon quasi-universelle. C'est à dire ces corrélations sans dimensions peuvent être appliquées dans des conditions dynamiques similaires à celle dans les quelles elles ont été établies en utilisant, par exemple un fluide différent.

6.2 Procédure de l'analyse dimensionnelle

1. établir une liste de variable pertinentes du problème considéré dépendantes ou indépendantes.
2. Identifier le nombre et la forme des paramètres adimensionnels.

Une de ces technique consiste à appliquer le théorème de Vaschy-Buckingham dit aussi théorème **Pi**.

6.3 Théorème de Vaschy-Buckingham

Énoncé : Une équation physique complète de la forme générale :

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0$$

où q_i représente les n variables physiques choisies pour décrire le problème, exprimées en terme de j unités physiques interdépendantes, peut être réécrite sous la forme :

$$F(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_k) = 0$$

où Π_i sont les nombres sans dimension construit à partir des q_i par $k = n - j$ équations de la forme :

$$\Pi_i = q_1^{m_1} q_2^{m_2} \dots q_n^{m_n}$$

où les m_i sont des constantes.

En pratique soit :

n : le nombre de paramètres indépendants du problème.

j' : le nombre de dimensions de base ($M, L, T, \theta \dots$ etc) exprimant les unités de n paramètres.

j : le nombre de dimensions de base correspondant aux paramètres répétés qui ne forme pas un produit.

k : le nombre de produit Π indépendants permettant de décrire le problème, soit : $k = n - j$.

Les étapes de démarche à suivre sont donc :

1. Lister les n paramètres du problème.
2. Exprimer les dimensions de chaque paramètre en utilisant les dimensions de base (M, L, T, θ), compter le nombre des dimensions de base utilisés j' dans l'ensemble de ces paramètres.

3. Trouver le nombre j en posant initialement $j=j'$. En suite chercher les paramètres répétés qui ne forme pas un produit \prod . Si c'est impossible réduire j un par un et répéter la procédure.
4. Choisir j paramètres répétés qui ne forment pas le produit \prod .
5. En considérant les paramètres non répétés, un par un, former les produits \prod en mettant ensemble les paramètres répétés et non répétés. En déduire algébriquement les puissances de chaque paramètre répété pour construire les produits \prod sans dimension.
6. Écrire la combinaison des produits \prod trouvés et les mettre sous la forme $\Pi_k = F(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_i)$.

6.3.1 Exemple d'application :

considérant le problème d'un fluide visqueux dans un conduit cylindrique. On cherche la chute de pression sans dimension en fonction des autres paramètres sans dimension.

1- Les paramètres du problème sont :

ΔP : chute de pression.

V : vitesse moyenne de l'écoulement.

D : diamètre de conduit.

l : longueur du conduit.

ρ : masse volumique du fluide.

μ : viscosité dynamique du fluide.

ε : rugosité de la parois du conduit.

Donc, on a ΔP est un paramètre dépendant et le reste ($V, D, l, \rho, \mu, \varepsilon$) sont des paramètres indépendants. alors, le nombre des paramètres du problème est $n=7$.

2- La liste des paramètres et leurs dimensions est présentée dans le tableau ci-dessous :

Paramètres	ΔP	V	D	l	ρ	μ	ε
dimensions	$ML^{-1}T^{-2}$	LT^{-1}	L	L	ML^{-3}	$ML^{-1}T^{-1}$	L

\Rightarrow le nombre de dimension de base est : $j' = 3$.

3- Choisir : $j = j' = 3$ et les paramètres répétés comme (V, D, ρ) . Cependant ces paramètres ne peuvent pas former un produit \prod sans dimension (aucune combinaison ne peut éliminer la masse de la densité et le temps de la vitesse).

4- V, D, ρ sont les paramètres répétés qui ne forme pas le produit \prod (étape identique à 3).

Donc, $k = n - j = 7 - 3 = 4$. Alors, il existe 4 produit indépendants.

5- construction des produits \prod :

$$\prod_1 = V^a D^b \rho^c \mu^1 = (LT^{-1})^a (L)^b (ML^{-3})^c (ML^{-1}T^{-1})^1$$

NB : Choisissons μ comme paramètre non répété.

Pour que le produit \prod_1 soit sans dimension, il faut que la puissance de chaque dimension de base soit égale à zéro.

Ainsi, on a :

$$\text{pour M : } c + 1 = 0 \Rightarrow c = -1$$

$$\text{pour L : } a + b - 3c - 1 = 0 \Rightarrow b = -1$$

$$\text{pour T : } -a - 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$\text{on a donc : } \prod_1 = \frac{\mu}{\rho V D},$$

on peut l'écrire sans perdre la généralité comme : $\prod_1 = \frac{\rho V D}{\mu} = Re$; qui est le nombre de Reynolds.

* Choisir l comme paramètre non répété (l : longueur de conduite et non unité de base).

$$\prod_2 = V^a D^b \rho^c l^1 = (LT^{-1})^a (L)^b (ML^{-3})^c (L)^1$$

Alors,

$$\text{pour M : } c = 0$$

$$\text{pour L : } a + b - 3c + 1 = 0 \Rightarrow b = -1$$

$$\text{pour T : } -a = 0$$

$$\text{on a donc : } \prod_2 = \frac{l}{D} : \text{le rapport longueur / diamètre}$$

6.4 La signification du rotationnel

, c'est un facteur de forme.

* Choisir ε comme paramètre non répété :

$$\Pi_3 = V^a D^b \rho^c \varepsilon^1 = (LT^{-1})^a (L)^b (ML^{-3})^c (L)^1$$

d'où : $a = c = 0$ et $b = -1$

alors : $\Pi_3 = \frac{\varepsilon}{D}$: c'est la rugosité relative.

* Choisissons finalement ΔP comme paramètre non répété :

$$\Pi_4 = V^a D^b \rho^c \Delta P^1 = (LT^{-1})^a (L)^b (ML^{-3})^c (ML^{-1}T^{-2})^1$$

pour M : $c + 1 = 0 \Rightarrow c = -1$

pour L : $a + b - 3c - 1 = 0 \Rightarrow b = 0$

pour T : $-a - 2 = 0 \Rightarrow a = -2$

alors : $\Pi_4 = \frac{\Delta P}{\rho V^2}$: c'est le coefficient de pression.

6- combinaison des paramètres : $\frac{\Delta P}{\rho V^2} = f\left(\frac{\rho V D}{\mu}, \frac{l}{D}, \frac{\varepsilon}{D}\right)$ ou $Cp = f(Re, \bar{l}, \bar{\varepsilon})$

le coefficient de chute de pression d'un écoulement visqueux dans une conduite ayant une rugosité est une fonction de :

- nombre de Reynolds.
- longueur sans dimension du conduit.
- rugosité sans dimension du conduit.

6.5 Similitude

Considérons deux problèmes différents par exemples deux écoulements visqueux distinctes $(\rho_1, \mu_1, l_1, V_1)$ et $(\rho_2, \mu_2, l_2, V_2)$ concernant le même phénomène (ici il s'agit de la viscosité). Les problèmes sont dits semblables si leurs équations sans dimension (équations réduites) sont identiques et si les conditions aux limites et initiales des problèmes exprimées sont identiques.

Conséquence : deux problèmes différents sont dits semblables si les paramètres sans dimension ou paramètres de similitude sont les mêmes, deux à deux, et si les conditions aux limites réduites sont les mêmes.

On distingue trois types de similitude en mécanique des fluides : similitude géométrique, similitude cinématique et similitude dynamique.

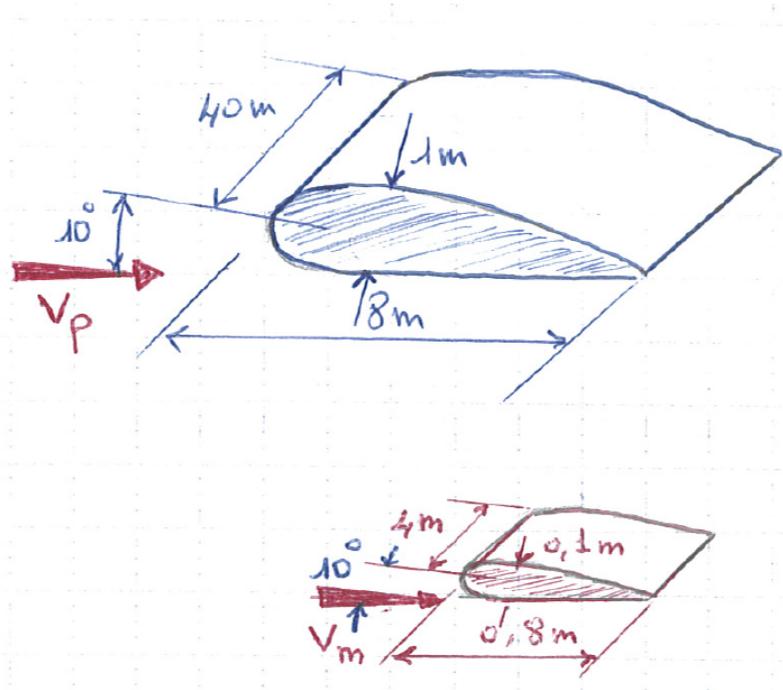


FIGURE 6.1 – profil d'aile

6.5.1 Similitude géométrique

L'échelle linéaire est la même, les dimensions linéaires du modèle réduit correspondent à celles du prototype définies par un facteur d'échelle constant. Exemple : considérant le profil d'aile.

si SF_k est le facteur d'échelle : $SF_k = \frac{r_m}{r_p} = \frac{L_m}{L_p} = \dots$

Dans ce type de similitude on conserve les mêmes angles, les mêmes directions d'écoulement, la même orientation par rapport à l'environnement (angle d'incidence identique).

6.5.2 Similitude cinématique

L'échelle de vitesse est la même, les vitesses aux points correspondants sur le modèle et le prototype sont dans la même direction. Elles sont différentes seulement par un facteur d'échelle constant β .

Conséquence : les écoulements ont le même motif de lignes de courant et le même régime d'écoulement.

exemple : écoulement autour d'un objet solide.

Les vitesses en chaque point sont proportionnelles par un facteur d'échelle constant β .

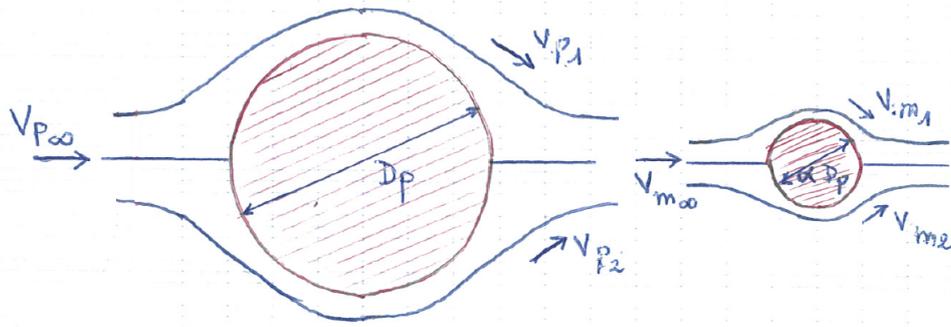
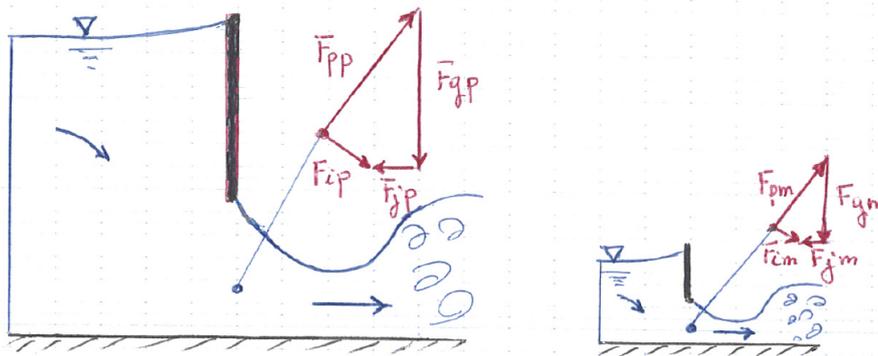


FIGURE 6.2 – Écoulement autour d'objet solide
 $V_{p\infty} = \beta V_{m\infty}$; $V_{p1} = \beta V_{m1}$; $V_{p2} = \beta V_{m2}$

6.5.3 Similitude dynamique

La similitude dynamique est réalisée si le rapport des forces aux points homogènes sur le modèle et le prototype est identique à un facteur d'échelle constant.

Exemple : écoulement à travers une porte d'écluse permettant à un bateau de passer d'un fleuve à un bassin ou l'inverse.



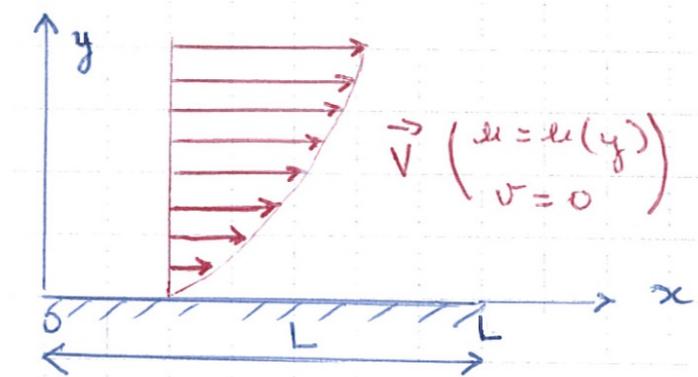
La similitude dynamique se produit dans les conditions suivantes :

1. Écoulement incompressible sans surfaces libres : $Re_m = Re_p$
2. Écoulement incompressible avec surfaces libres : $Re_m = Re_p$ et $Fr_m = Fr_p$
3. Écoulement incompressible : $Re_m = Re_p$; $Ma_m = Ma_p$ et $\gamma_m = \gamma_p$.
4. Écoulement avec tension surfacique : $Re_m = Re_p$; $We_m = We_p$.

6.6 Régimes d'écoulement et paramètres de similitude

6.6.1 Nombre de Reynolds

Considérons un écoulement de fluide visqueux le long d'une plaque plane de longueur L . On suppose les forces de volumes négligeables devant les forces visqueuses.



L'expérience montre que si la parois est imperméable, le champ de vitesse est tangent à la paroi et que la vitesse diminue près de la paroi et s'annule sur la paroi si celle-ci est immobile. On suppose que le champ de vitesse est parallèle à l'axe des X et la viscosité dynamique est fonction de la vitesse : $\mu = U(y)$.

L'équation de bilan de quantité de mouvement s'écrit dans ce cas :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\vec{grad}P + \underbrace{\rho \vec{f}}_{\approx 0} + \underbrace{\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \vec{x}}_{\text{force de viscosité par unité volume}}$$

Adimensionnons cette équation de la manière suivante :

$$L\bar{u} = \frac{u}{U_0}, \bar{v} = \frac{v}{U_0}, \bar{P} = \frac{P}{P_0}$$

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \bar{y} = \frac{y}{L}, \bar{t} = \frac{t}{t_0}$$

où U_0, P_0, t_0 et L sont choisis comme grandeurs de référence.

Bibliographie

Livres :

[1] Sakir Amiroudine & Jean-Luc Battaglia, « Mécanique des fluides », 2nd édition, DUNOD, Paris 2014

[2] Jean-Francois Sini, « cours de MDF », HAL Id : cel-00356205, 2009

Supports de cours :

[3] Laid MESSAOUDI, « MDF » Polycopie de cours, Université de Batna2, 2016

[4] Christophe Ancey, « Mécanique des fluides, introduction », Notes de cours : version 12.2 du 2 juin 2016

[5] M'hamed BERIACHE, MÉCANIQUE DES FLUIDES I, Université de Chlef, 2016

[6] Philippe Marty, « MECANIQUE DES FLUIDES : Maste 1 GDP », Université Joseph Fourier, Grenoble, 2012

[7] Daniel Huilier, « Écoulements en conduites », polycopie de cours 2010

[8] Riadh BEN HAMOUDA, NOTIONS DE MECANIQUE DES FLUIDES, Centre de Publication Universitaire, 2008

[9] METICHE MEHDI, « MÉCANIQUE DES FLUIDES APPROFONDIE », Centre Universitaire de Béchar, 2004

Sites internet :

schémas tirés de sites :

[10] <https://pbs.twimg.com/media/EUcF1HiWkAASM6K.png>

[11] <https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcQP52OH9F2qPX7BZ-AlkS8k0i5h7yqMlfWk2Q&usqp=CAU>