

# Chapter 1

## T.P. 1 : Écoulements plans

### 1.1 But du T.P.

Nous essaierons au cours de ce T.P. de modéliser deux écoulements plans, l'écoulement de Couette et celui de Poiseuille, à l'aide d'un logiciel industriel, Fluent. Nous vérifierons que les résultats obtenus soient conformes à la théorie.

### 1.2 Notion d'établissement

Dans une conduite, un écoulement de fluide incompressible peut être permanent ou non (instationnaire). Quand il est permanent, ses propriétés en un point fixe ne varient pas avec le temps.

De plus, il peut évoluer le long de cette conduite jusqu'à ce que le profil de vitesse atteigne une forme définitive, par exemple parabolique dans le cas d'un écoulement de Poiseuille (Fig. 1.1). Ses caractéristiques cinématiques n'évoluent plus d'une section droite à l'autre, l'écoulement est alors établi. La distance au cours de laquelle le profil des vitesses évolue correspond à la *longueur d'entrée* ou *d'établissement*.

La notion d'écoulement permanent est une notion temporelle tandis que la notion d'écoulement établi est une notion spatiale.

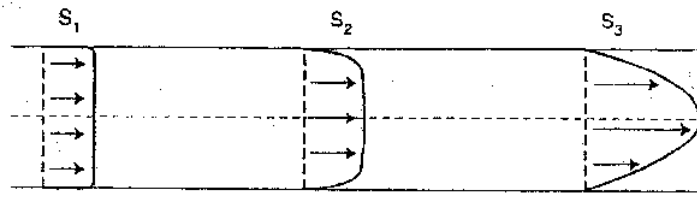


FIG. 3a. — Écoulement permanent non établi.

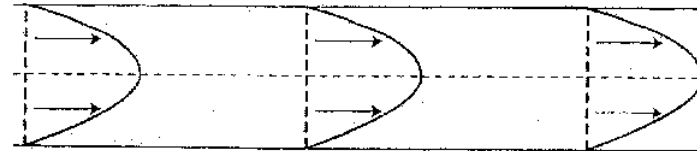


FIG. 3b. — Écoulement permanent établi.

Figure 1.1: Notion d'établissement (figure extraite de R. Comolet, *Mécanique des fluides*, p.5).

## 1.3 Écoulement de Couette plan

### 1.3.1 Expérience de Couette, viscosité dynamique

Les propriétés visqueuses des fluides newtoniens sont caractérisées par les deux paramètres  $\mu$  et  $\nu$ , les viscosités dynamique et cinématique.

Il est possible de mesurer  $\mu$  à partir de l'expérience dite de Couette. Considérons deux cylindres coaxiaux, de rayons peu différents, dont l'espace intermédiaire est rempli de fluide (figure 1.2). Le cylindre extérieur est entraîné avec un moteur avec une vitesse angulaire constante  $\omega$ . Pour maintenir le cylindre intérieur immobile, il faut lui appliquer un couple  $C$  de sens opposé. À partir de ce concept, il est possible de déterminer une mesure absolue de  $\mu$  avec:

$$\mu = \frac{Ce}{2\pi r^3 h \omega} \quad (1.1)$$

où  $e$  est la distance entre les deux cylindres, petite devant le rayon moyen  $r$ , et  $h$  la hauteur du cylindre. La viscosité dynamique  $\mu$  s'exprime en  $\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ , qui, dans le système international, est le poiseuille,  $Pl$ . Un poiseuille est la viscosité d'un fluide dans lequel la contrainte est de  $1 \text{ N.m}^{-2}$  quand le gradient de vitesse est de  $1 \text{ m.s}^{-1}$  par mètre. La viscosité cinématique  $\nu = \mu/\rho$ , où  $\rho$  est la masse volumique du fluide, a pour unité le  $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$ .

L'expérience peut être schématisée en considérant un plan mobile  $P'$  se déplaçant parallèlement à un plan fixe  $P$  parallèle à  $Ox$  de surface  $S = 2\pi r h$ , à la distance  $e$  et avec la vitesse  $V = \omega e$  (Fig. 1.2).

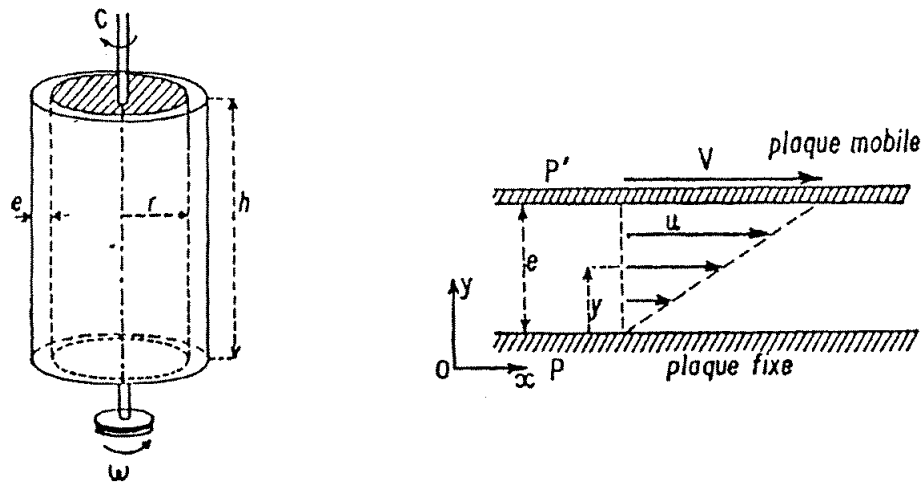


Figure 1.2: gauche : Expérience de Couette ; droite : Schématisation dans le plan de l'expérience de Couette (figures extraites de R. Comolet, *Mécanique des fluides*, p.24).

### 1.3.2 Écoulement longitudinal laminaire de Couette

Si l'écoulement est parallèle à une direction donnée  $Ox$ , les lignes de courant sont des droites parallèles. Dans le cas d'un écoulement de Couette plan, où la plaque supérieure a une vitesse constante  $V$ , la distribution des vitesses est linéaire et s'exprime par:

$$u(y) = \frac{V}{e} y \quad (1.2)$$

Dans le cas d'un écoulement 2D, le vecteur tourbillon se réduit à un scalaire  $\omega$  (vorticité) dirigé selon  $z$ , tel que:

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.3)$$

Pour le profil linéaire de Couette, on a alors :

$$\omega = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{V}{D} \quad (1.4)$$

soit une valeur constante. Cela signifie que lorsque le profil est linéaire, c'est-à-dire lorsque l'écoulement est établi, la vorticité est constante.

### 1.3.3 Modélisation et simulation de l'écoulement de Couette plan à l'aide de Fluent

Un écoulement 2D ( $xy$ ) entre deux plaques infinies selon  $z$  va être modélisé à l'aide de Fluent. La distance  $D$  entre les plaques est égale à 0,05 m et le domaine considéré est de longueur  $L$  tel que  $L = 5D$ . La plaque supérieure se déplace à une vitesse  $V_0$  comprise entre  $10^{-6}$  et  $10^{-3}$  m.s $^{-1}$  et la vitesse à l'entrée est prise égale à  $V_0/2$ .

La simulation concerne un écoulement d'huile de masse volumique (*density* dans Fluent)  $\rho = 10^3$  kg.m $^{-3}$  et de viscosité dynamique (*viscosity*)  $\mu = 10^{-1}$  Pl.

Construisez un maillage de  $100 \times 21$  points. La précision sur la convergence peut être prise égale à  $10^{-5}$  et les coefficients de sous-relaxation de la vitesse et de la pression égaux à 0,5.

Mesurez la longueur  $l$  nécessaire à l'établissement du profil de Couette, en prenant comme critère la valeur théorique de vorticité  $\omega = -V_0/D$ . Vérifiez l'allure linéaire du profil de vitesse  $u$  dans *xy-plot*.

Calculez le débit dans Fluent et comparez-le à la théorie. Indiquez la vitesse que vous avez choisie, le nombre d'itérations obtenu à convergence et le temps de calcul approximatif. Commentez les résultats numériques obtenus.

## 1.4 Écoulement de Poiseuille Plan

### 1.4.1 Expérience de Poiseuille

Un montage expérimental est représenté sur la figure 1.3. En général, le fluide provient d'un réservoir auquel est relié le tube. Il s'agit ici d'un tube circulaire. À l'entrée du tube, la répartition des vitesses est mal connue, souvent voisine d'une répartition uniforme. Elle se modifie ensuite progressivement à mesure que l'on avance dans le tube jusqu'à atteindre une forme parabolique (Fig. 1.1). Cette première partie du tube, siège d'une évolution du profil des vitesses, correspond à la longueur d'établissement. Elle s'étend en effet sur une longueur  $l$  qui dépend du nombre de Reynolds  $\mathcal{R}_e = UD/\nu$  défini à partir de la vitesse  $U$  au point B (profil droit ou bouchon), du diamètre  $D$  de la conduite et de la viscosité cinématique  $\nu$  du fluide. La figure 1.4 présente l'évolution du profil pour  $\mathcal{R}_e = 500$ .

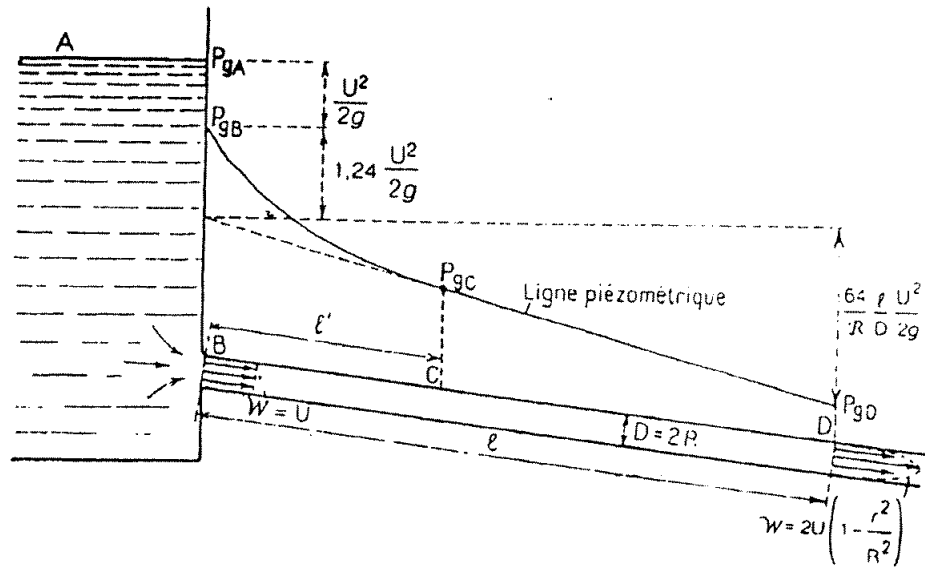


Figure 1.3: Écoulement dans un tube de Poiseuille (figure extraite de R. Comolet, *Mécanique des fluides*, p.95).

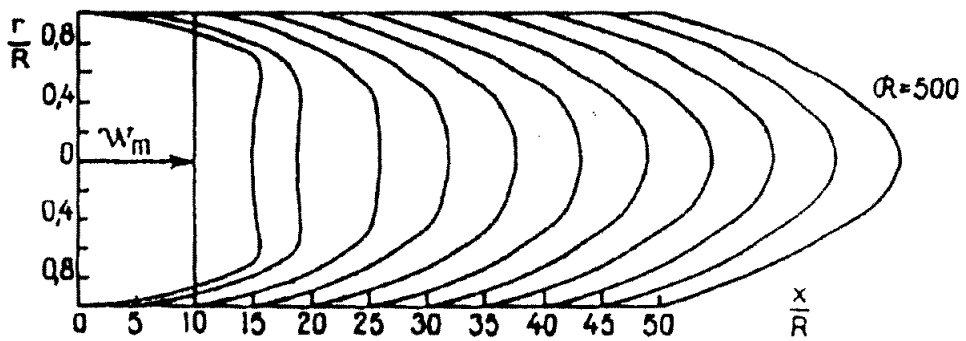


Figure 1.4: Évolution du profil des vitesses dans la zone d'entrée d'une conduite cylindrique ;  $x/R$  est la distance relative des sections considérées (figure extraite de R. Comolet, *Mécanique des fluides*, p.96).

Les résultats suivants sont admis dans le cas d'une conduite cylindrique :

$$\begin{aligned} \frac{l}{D} &\longrightarrow 0,6 && \text{pour} && \mathcal{R}_e \longrightarrow 0 \\ \frac{l}{D} &= 0,06 \mathcal{R}_e && \text{pour} && 100 < \mathcal{R}_e < 500 \\ \frac{l}{D} &= 0,04 \mathcal{R}_e && \text{pour} && \mathcal{R}_e > 1000 \end{aligned}$$

Nous essaierons dans ce T.P. d'établir des lois similaires mais pour des écoulements entre deux plans.

Il est montré expérimentalement que le régime laminaire se produit réellement dans le tube à la condition que le nombre de Reynolds de l'écoulement ne soit pas trop grand ( $\mathcal{R}_e < 2572$ ). Pour des nombres de Reynolds plus élevés, l'écoulement devient en général turbulent et ne satisfait plus aux lois précédentes.

### 1.4.2 Historique

Les premières études expérimentales d'écoulements laminaires ont été menées vers 1840 par le médecin physiologiste français Poiseuille à l'occasion de recherches sur le mouvement du sang dans les vaisseaux sanguins. Il fit couler de l'eau dans des tubes de verre capillaires (diamètres de quelques centièmes à quelques dixièmes de millimètres) et déduisit de ses expériences les caractères essentiels des écoulements laminaires.

À la même époque, l'allemand Hagen fit des expériences similaires avec des tubes plus gros (quelques millimètres de diamètres) et semble avoir ignoré les travaux de Poiseuille. Il observa que l'écoulement changeait de nature pour des vitesses notables.

En 1883, Reynolds reproduisit de façon systématique ces expériences dans des tubes de 5 à 25 mm de diamètres et colora un filet d'eau. Quand le débit d'eau était faible, l'écoulement se maintenait sans osciller, il était laminaire. Quand le débit augmentait, le filet, d'abord rectiligne, se mettait à osciller et diffusait dans tout le tube à partir d'une certaine distance. Dans la première partie du tube, l'écoulement était laminaire et dans la seconde, il devenait turbulent.

Reynolds mit en évidence l'importance du rapport sans dimension  $UD/\nu$  dans ce changement de régime, qui devint le nombre dit de Reynolds.

Il trouva que pour  $\mathcal{R}_e < 2000$ , l'écoulement était toujours laminaire, tandis qu'au dessus il devenait turbulent, plus ou moins facilement selon les circonstances. Si l'on revient aux expériences de Poiseuille, il est clair que celui-ci ne pouvait obtenir dans ses tubes capillaires que des écoulements laminaires. En effet, avec  $D = 10^{-4}$  m,

$\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  (eau à  $20^\circ\text{C}$ ), la turbulence ne peut apparaître que pour des vitesses supérieures à 20 m/s, ce qui provoquerait la cassure d'un tube aussi fin. Hagen, en utilisant des tubes plus gros, put mettre en évidence les deux types d'écoulements.

Dans les conduites industrielles de plusieurs décimètres de diamètre à plusieurs mètres, l'écoulement est pratiquement toujours turbulent, même à un débit très faible.

Depuis, l'écoulement établi dans une conduite cylindrique porte souvent le nom de Poiseuille-Hagen.

### 1.4.3 Propriétés physiques des fluides

Dans le tableau qui suit sont données, à titre indicatif, les valeurs de masse volumiques, de viscosités dynamiques et cinématiques, à  $20^\circ\text{C}$ , pour une gamme de fluides connus.

<i>fluide</i>	$\rho \text{ (kg.m}^{-3}\text{)}$	$\mu \text{ (N.s.m}^{-2}\text{) ou Pl}$ ou $\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$	$\nu \text{ (m}^2.\text{s}^{-1}\text{)}$
alcool éthylique (éthanol)	789	$12 \cdot 10^{-4}$	$1,52 \cdot 10^{-6}$
ammoniaque	610	$2,2 \cdot 10^{-4}$	$3,6 \cdot 10^{-7}$
eau	998	$10,046 \cdot 10^{-4}$	$1,006 \cdot 10^{-6}$
éther éthylique	714	$2,43 \cdot 10^{-4}$	$3,4 \cdot 10^{-7}$
glycérine (glycérol)	1260	$14800 \cdot 10^{-4}$	$1,17 \cdot 10^{-3}$
huile de graissage	871	$130,527 \cdot 10^{-4}$	$1,49 \cdot 10^{-5}$
huile d'olive	914	$808 \cdot 10^{-4}$	$8,84 \cdot 10^{-5}$
huile de paraffine	810	$1018 \cdot 10^{-4}$	$1,25 \cdot 10^{-4}$
huile de ricin	960	$9870 \cdot 10^{-4}$	$1,03 \cdot 10^{-3}$
huile de lubrification (avions)	871	$130,527 \cdot 10^{-4}$	$1,49 \cdot 10^{-5}$
mercure	13546	$15,54 \cdot 10^{-4}$	$1,15 \cdot 10^{-7}$

Table 1.1: Constantes physiques des fluides à  $20^\circ\text{C}$ .

### 1.4.4 Modélisation et simulation de l'écoulement de Poiseuille plan à l'aide de Fluent

Modélisez un écoulement 2D ( $xy$ ) entre deux plaques infinies selon  $z$  (Fig. 1.5). La vitesse à l'entrée est notée  $U_0$ . La hauteur  $D$  du canal est prise égale à 0,05 m et des domaines de longueur  $L = 5D$  et  $30D$  seront considérés, selon la valeur du nombre de Reynolds.

Ce dernier est défini comme suit:

$$\mathcal{R}_e = \frac{U_0 D}{\nu} = \rho \frac{U_0 D}{\mu}, \quad (1.5)$$

avec  $\rho$  la masse volumique du fluide (*density* dans Fluent),  $\mu$  la viscosité dynamique (*viscosity*) et  $\nu$  la viscosité cinématique.

Deux études vont être menées. Elles vont différer par la variable considérée, mais ont le même but d'estimer le rapport  $l/D$ , où  $l$  est la longueur d'établissement du profil de Poiseuille.

Reportez dans un tableau final commun aux deux études le nombre de Reynolds  $\mathcal{R}_e$ , la viscosité dynamique  $\mu$ , la viscosité cinématique  $\nu$ , le rapport de forme du domaine  $L/D$ , le rapport  $l/D$ , la vitesse d'entrée  $U_0$ , le maillage utilisé, le nombre d'itérations et le temps de calcul approximatif.

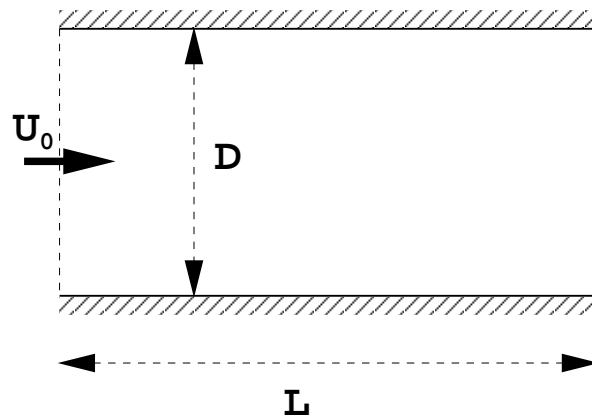


Figure 1.5: Modélisation de l'écoulement de Poiseuille.

#### Étude à bas nombre de Reynolds

L'écoulement est simulé pour un nombre de Reynolds au choix, variant entre  $5 \times 10^{-5}$  et 5, avec  $L = 5D$ . Vous considèrerez un écoulement d'huile à bas Reynolds tel que:

$$\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3} \quad \mu = 10^{-1} \text{ N.s.m}^{-2} \quad (1.6)$$



Ces données correspondent à :  $Re = 5 \times 10^2 U_0$ . La vitesse à l'entrée peut donc varier de  $10^{-7}$  à  $10^{-2} \text{ m.s}^{-1}$  (soit 10 nanomètres et 1 cm par seconde).

Prenez un maillage de  $100 \times 21$ , des coefficients de sous-relaxation  $\alpha_U = 0,5$  et  $\alpha_p = 0,5$  et une précision de résolution de  $10^{-5}$ . Mesurez la longueur d'établissement du profil en étudiant la vitesse longitudinale au centre du canal. Celle-ci doit être égale à la vitesse théorique de  $3/2 U_0$ , avec une erreur admise de 1%.

Reportez vos résultats dans le tableau général ainsi que sur la figure 1.6 fournie (que vous conserverez). Que remarquez-vous pour cette première étude?

### Étude pour des nombres de Reynolds supérieurs à 10

Considérez à présent une vitesse d'entrée  $U_0 = 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$  et faites varier la viscosité dynamique  $\mu$  dans une gamme de  $10^{-3}$  à  $10^{-4}$ . Étudiez l'écoulement de Poiseuille plan pour deux ou trois nombres de Reynolds, compris entre 20 et 300.

Construisez un domaine tel que  $L = 30D$ , en conservant des cellules de rapport de forme faible (*i.e.* approximativement carrées). Le critère de convergence est toujours le bon accord avec la valeur théorique de  $3/2 U_0$  et la précision est suffisante pour  $2,5 \times 10^{-5}$ . Calculez également le rapport  $l/D$  et déterminez le coefficient  $\alpha$  tel que  $l/D = \alpha Re$ . Reportez vos résultats dans le tableau général et sur les figures 1.6 et 1.7.

Comparez les résultats obtenus pour cette simulation de l'écoulement de Poiseuille plan avec Fluent aux données expérimentales concernant la conduite cylindrique (section 1.4.1). Commentez.

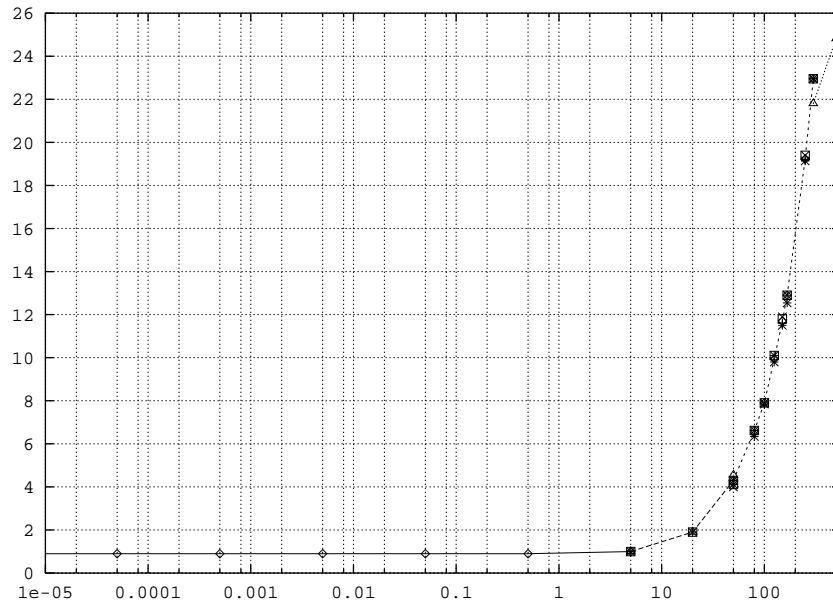


Figure 1.6: Évolution de la longueur d'établissement  $l/D$  en fonction du nombre de Reynolds  $\mathcal{R}_e$ , en échelle log-lin.

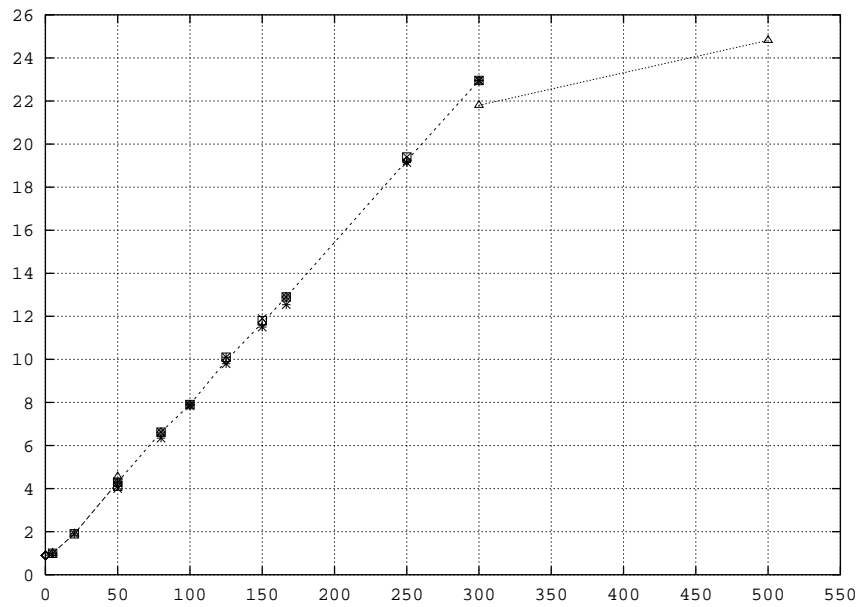


Figure 1.7: Évolution de la longueur d'établissement  $l/D$  en fonction du nombre de Reynolds  $\mathcal{R}_e$ , en échelle lin-lin.