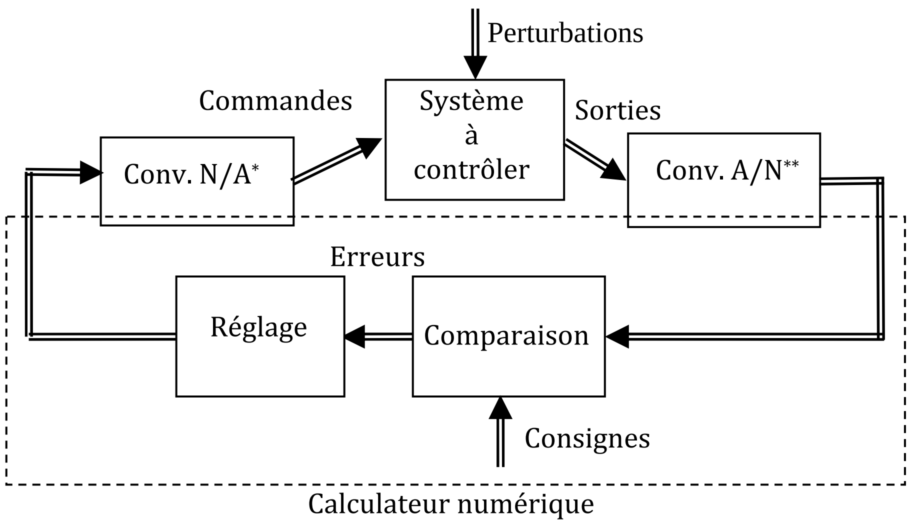
CHAPITRE UN

MODELISATION DES SIGNAUX ET DES SYSTEMES ECHANTILLONNES

1.1 Introduction :

Avec l'avènement de l'informatique et le développement de l'électronique numérique, les systèmes asservis (Systèmes de contrôle), se sont dotés de possibilités offertes par le calcul numérique. En effet, la comparaison, le réglage et la génération des signaux de commande peuvent être réalisés au sein du calculateur numérique moyennant des programmes (algorithmes), voir Fig. 1.1. Et comme les systèmes à contrôler sont généralement des systèmes à temps continu (de nature analogique), obligation l'est de convertir les signaux à temps continu issus du système (capteurs) en numérique et inversement pour les signaux numériques générés par le calculateur (pour l'organe de puissance).



* N/A : Numérique/Analogique
** A/N : Numérique/Analogique

Fig 1.1. Commande et réglage numérique

1.2 Principes fondamentaux de l'échantillonnage des signaux :

L'échantillonnage d'un signal est opération qui permet de prélever des points d'un (échantillons) d'un signal à temps continu. Ladite opération est nécessaire pour numériser tout signal à acquérir dans un calculateur numérique (Système à microprocesseur). L'échantillonneur est suivi d'un bloqueur d'ordre zéro (*BOZ*) permettant ainsi de maintenir l'échantillon jusqu'à conversion par le convertisseur analogique numérique (CAN).

Soit $e(t)$ le signal à échantillonner. L'échantillonnage se fait aux instants : $t=k.T_e$, où, T_e est la période d'échantillonnage et k entier naturel (causalité), alors, e*(t) est le signal échantillonné (c'est un signal à temps discret : ce signal n'existe qu'aux instants de prise des échantillons). Le signal en *escalier* $e_b(t)$ obtenu par un bloqueur BOZ est uns signal à temps continu.

En numérique, une fois le signal échantillonné, il est quantifié puis codé et Il en résulte une séquence de nombres dont le traitement se fait par programmes. Les systèmes (numériques) traitant des séquences de nombres sont bâtis autour de processeurs. Ainsi, le signal numérique e_n est une suite de valeurs :

$$e_n=\{ e_n(1), e_n(2), e_n(3), e_n(4), \ldots\}. \qquad (1.1)$$

Il représente le signal d'origine $e(t)$ à ± Δe (erreur due à la quantification liée au nombre de valeurs numériques possibles conséquence du nombre de bits du convertisseur A/N, exemple, à 8 bits : 256 valeurs possibles signées ou non).

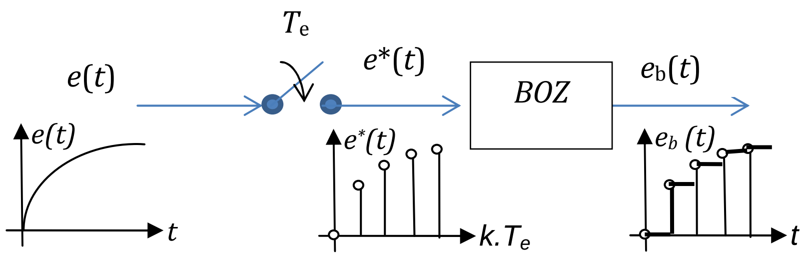


Fig. 1.2 : Schéma de principe de l'échantillonneur/Bloqueur

* <u>Bloqueur d'Ordre Zéro (BOZ) :</u>

Un bloqueur d'ordre zéro est défini par sa réponse impulsionnelle :

$$b_o(t) = rect\left(\frac{t - T_e/2}{T_e}\right) \qquad (1.2)$$

qui est un signal rectangle obtenu par maintien de l'impulsion unité (échantillon) sur une durée de T_e. Il peut être défini aussi par sa fonction de transfert (transformée de *Laplace*):

$$B_o(p) = \frac{1 - e^{-T_e p}}{p} \qquad (1.3)$$

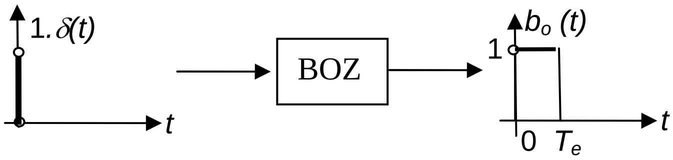


Fig. 1.3 : Bloqueur d'ordre zéro (BOZ)

* Théorème de Shannon (Théorème d'échantillonnage):

Un signal est correctement échantillonné s'il obéit à la règle établie par Shannon :

$$f_e \geq 2.F_{max} \tag{1.4}$$

où : f_e est la fréquence d'échantillonnage (T_e=1/ f_e: la période d'échantillonnage) et F_{max} la fréquence maximale contenue dans le signal (*Fourier*) .

Le choix de f_e qui se fait eu égard à la composante la plus rapide (de cadence grande) du signal à échantillonner, est lié à la restitution du signal donc à la restitution de son spectre d'origine car le non respect de la règle de Shannon entraîne un phénomène dit de repliement dû à un chevauchement du spectre d'origine et du spectre répété conséquence de l'opération d'échantillonnage.

Le signal échantillonné $s^*(t)$ de $s(t)$ a une cadence T_e (période d'échantillonnage) s'écrit :

$$s^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T_e s(kT_e).\delta(t - kT_e) = T_e s(t).\delta_{Te}(t\ ) \tag{1.5}$$

Sa transformée de Fourier est :

$$S^*(f) = T_e.S(f) * \frac{1}{T_e}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f - nf_e) = T_e.S(f) * \delta_{fe}(f) \tag{1.6}$$

(1.6) implique que pour *n* entier relatif, le spectre du signal avant échantillonnage est périodisé :

Pour		
	$n=0$: $S(f)*\delta(f) = S(f)$	$n=-1$: $S(f)*\delta(f+f_e) = S(f+f_e)$
	$n=1$: $S(f)*\delta(f-f_e) = S(f-f_e)$	$n=-2$: $S(f)*\delta(f+2f_e) = S(f+2f_e)$
	$n=2$: $S(f)*\delta(f-2f_e) = S(f-2f_e)$	

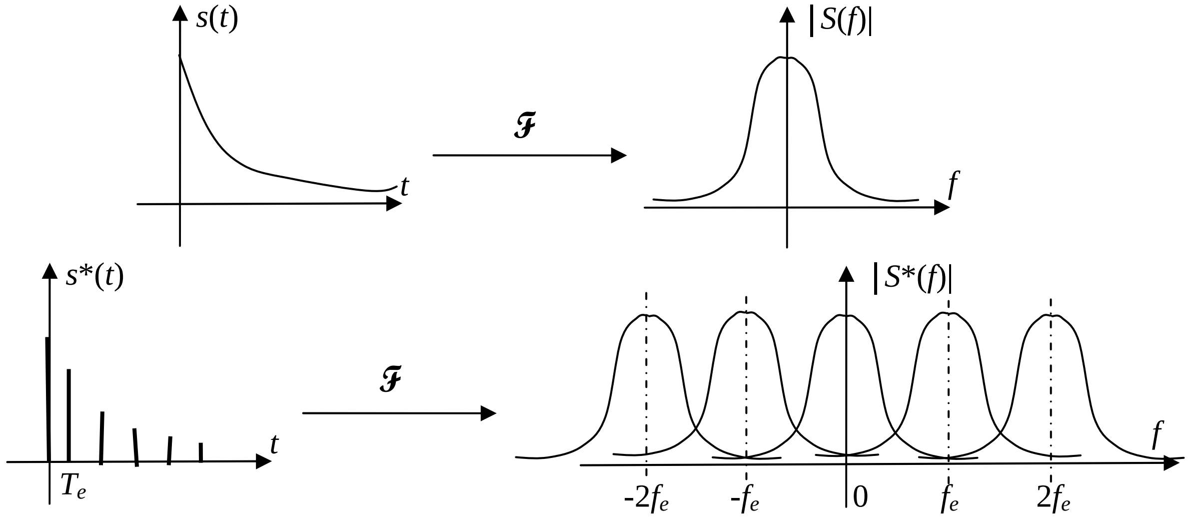


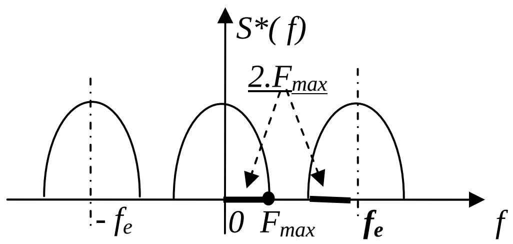
Fig. 1.4. Spectre d'un signal échantillonné

* <u>Reconstruction du signal $s(t)$</u>:

Pour pouvoir reconstituer $s(t)$, c'est-à-dire revenir au signal dont le spectre est unique (sans répétition), la condition de *Shannon* doit être respectée et dans ce cas, le signal continu est restituable soit par :

- un BOZ ;
- ou un un filtre passe-bas de réponse impulsionnelle :

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \quad \text{soit : } H(p) = \frac{1}{1+\tau p} \qquad (1.7)$$



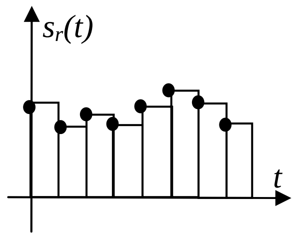
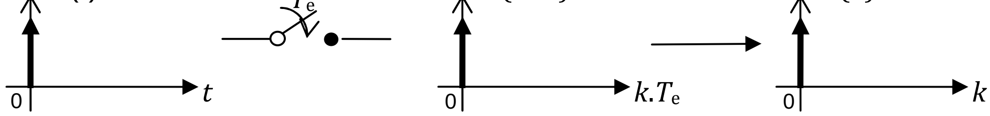


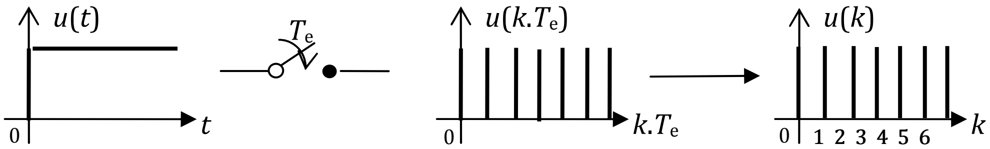
Fig. 1.5. Condition de Shannon pour un signal à spectre borné	Fig. 1.6. Restitution d'un signal par blocage

1.3. <u>Exemples de signaux échantillonnés simples :</u>

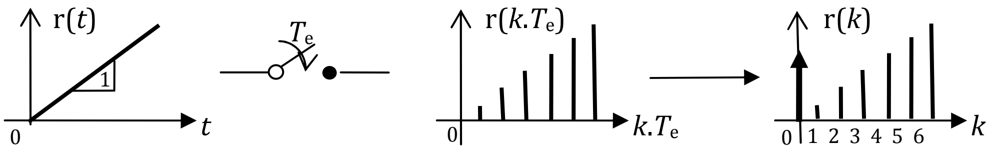
a- <u>Impulsion de Dirac</u> : $\delta(k)$



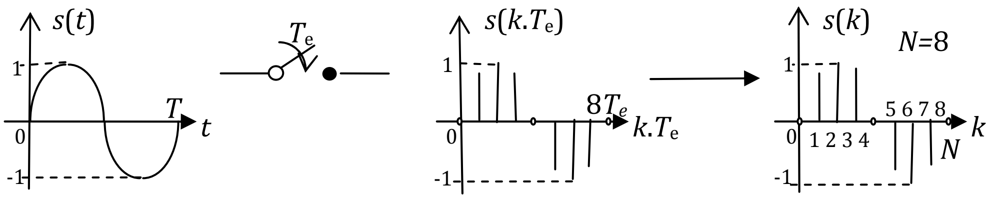
b- <u>Echelon unité</u> : $u(k)= 1$ avec $k\in IN$



c- <u>Rampe unité</u> : $r(k)= k$ avec $k\in IN$



d- <u>Sinusoïde</u> : $s(k)= \sin(2\pi.k/N)$ avec $k\in IN$ et $N=T/T_e$



1.4. <u>Transformée en z</u> :

a- <u>Définition</u> : Soit un signal discret $s(n)$ (causal), sa transformée en Z est donnée par :

$$S(z) = Z\{s(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} s(k)\, z^{-k} \qquad (1.8)$$

avec z complexe : $z = \rho\, e^{j\varphi}$

* Pour un signal échantillonné avec une période d'échantillonnage T_e, le passage de p en z est : $z = e^{-Te.p} = e^{-Te.\sigma} \,.\, e^{-jTe.\omega} = \rho\, e^{j\varphi}$

b- Transformée du retard (pour l coups):

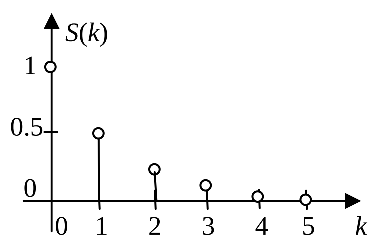
$$Z\{s(k-l)\} = z^{-l}\, S(z) \qquad (1.9)$$

c- <u>Exemple de calcul</u> :

Un signal discret est donné par : $s(k) = 0.5^k.u(k)$

La transformée en Z de $s(k)$ s'écrit :

$$S(z) = Z\{s(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} 0.5^k\, z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{0.5}{z}\right)^k$$



C'est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $r = 0.5/z$ de premier terme v_o=1.

Pour un nombre N fini de terme : $\sum_{n=0}^{N} r^n = v_o \frac{1-r^{N+1}}{1-r}$, somme qui converge vers :

$v_o \frac{1}{1-r}$ lorsque N$\rightarrow \infty$ pour la condition |r| <1

Donc pour notre exemple : $S(z)$ = Z{$s(k)$} = $\sum_{k=0}^{\infty} 0.5^k \; z^{-k} = \frac{1}{1-0.5z^{-1}}$ pour $|z| > 0.5$

Remarque : La transformée en z est la version échantillonnée de la transformée de *Laplace*

1.5. Fonction de transfert en z :

Dans le cas continu des systèmes linéaires et invariant dans le temps (LIT), l'entrée $e(t)$ et la sortie $s(t)$ sont liées par :

a- une équation différentielle linéaire ;

b- le produit de convolution : $s(t)= g(t)*e(t)$ où $g(t)$ est la réponse à l'impulsion (ou impulsionnelle) et $s(t) = g(t)*e(t) = e(t)*g(t) = \int_{-\infty}^{t} e(\tau)g(t-\tau)d\tau$

L'application de la transformée de *Laplace* dans les deux cas permet de définir un rapport Sortie/Entrée, appelé Fonction de transfert :

$$S(p)/E(p) = \mathcal{L}\{g(t)\} = G(p) \qquad (1.10)$$

Pour ce qui est des systèmes échantillonnés, puisque les signaux sont échantillonnés (signaux à temps discrets) à une cadence d'échantillonnage définie par T_e, la relation entrée sortie s'exprime par :

a- une équation aux différences : relation entre échantillons des Entrées/Sorties.

b- le produit de convolution : $s(k)= g(k)*e(k)$ où $g(k)$ est la réponse à l'impulsion discrète et $s(k) = g(k)*e(k) = e(k)*g(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e(m)g(k-m)$.

Pour ces deux représentations, en appliquant la transformée en z, on obtient le rapport sortie/entrée :

$$S(z)/E(z) = \mathcal{L}\{g(\text{k})\} = G(z) \qquad (1.11)$$

* <u>Exemples d'équations aux différences avec fonctions de transfert</u> :

- Système récursif : $s(k)+a\,s(k-1)=b\,e(k) \quad\Rightarrow\quad \dfrac{S(z)}{E(z)}=\dfrac{b}{1+a\,z^{-1}}=\dfrac{b\,z}{z+a}$
- Système non récursif : $s(k)=b_0\,e(k)+b_1\,e(k-1) \Rightarrow \quad \dfrac{S(z)}{E(z)}=b_o+b_1z^{-1}=\dfrac{b_oz+b_1}{z}$

Un système échantillonné est représenté par la fonction de transfert du système continu précédé d'un échantillonneur ou d'un échantillonneur/Bloqueur (généralement) :

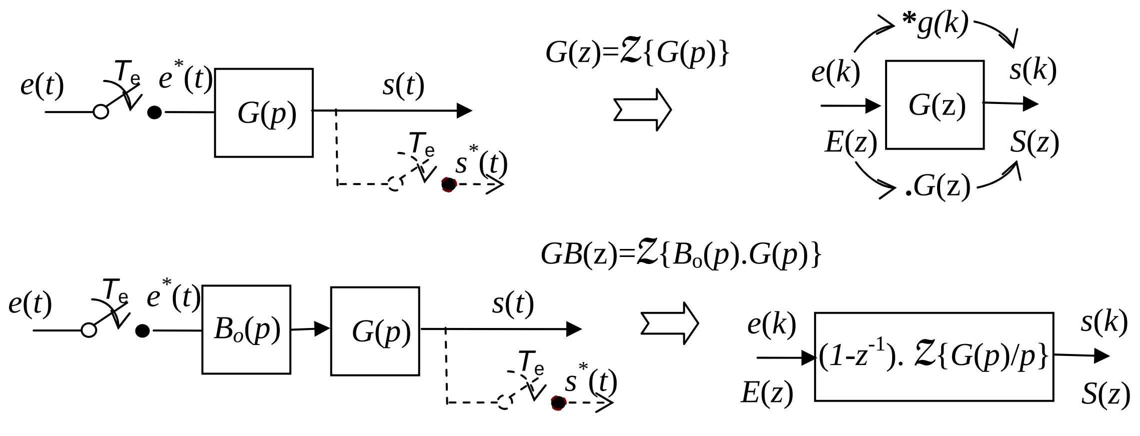


Fig. 1.7 Systèmes échantillonnés et fonctions de transfert

1.6. <u>Transformée de Fourier discrète (TFD)</u>:

En traitement du signal par voie numérique, nous aurons généralement à :

1- observer ou modifier le spectre;

2- restituer le signal après modification.

Les sommes continues (intégrales) sont remplacées par des sommes discrètes.

Pour un signal de durée T_o, échantillonné à T_e, le nombre de points est $N_o=T_o/T_e$.

Son spectre est considéré dans la bande $(-f_e/2, f_e/2)$, soit un nombre de raies $N_o=f_e/F_o$

$$S(f)=\int_0^{To} s(t)\,e^{-j2\pi f t}\,dt \quad \xrightarrow[\text{par des rectangles}]{\text{Approximation}} \quad S(f)\approx T_e\sum_{k=0}^{No-1} s(kT_e)e^{-j2\pi f kTe} \qquad (1.12)$$

où f est une fréquence continue, or sur ordinateur (en numérique) le calcul se fait uniquement sur des points soit $f = mF_o$ dans la bande de fréquence, ce qui revient à écrire (1.12) comme :

$$S(mF_o) = S(m) = T_e \sum_{k=0}^{No-1} s(k) e^{-j2\pi mk/No} \qquad (1.13)$$

C'est la transformée de Fourier discrète (TFD) de la suite d'éléments $s(k)$.

La transformée inverse s'écrit alors si la condition de *Shannon* est respectée :

$$s(kT_e) = s(k) = F_o \sum_{m=-No/2}^{No/2} S(m) e^{j2\pi mk/No} \qquad (0 \leq k \leq N_o\text{-}1) \qquad (1.14)$$

<u>Remarques</u> :

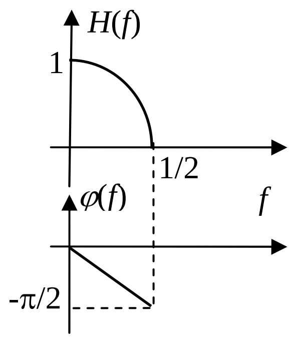
- La TFD est la version échantillonnée de la transformée de Fourier;
- La TFD d'un signal périodique $\Rightarrow$ Série de Fourier.

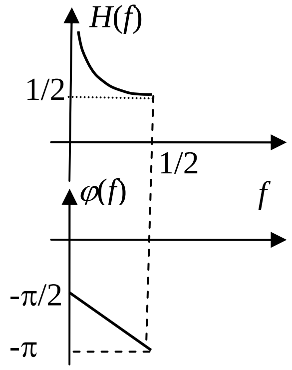
1.7. <u>Comportement fréquentiel des systèmes échantillonnés</u> :

Comme il a été déjà illustré sur le Fig. 1.4, le spectre d'un signal échantillonné est périodisé du fait de l'opération d'échantillonnage, et comme un système LIT peut être représenté par sa réponse impulsionnelle, transformée en z inverse de la fonction de transfert, les diagrammes tels que de *Bode*, *Nyquist* ou de *Black* tracé à partir de cette fonction de transfert sont limités dans la bande $0\text{-}f_e/2$ où la borne supérieure est appelée fréquence de *Nyquist* : $f_N = f_e/2$.

* <u>Exemple</u> : Diagramme de *Bode*

Dans le domaine des fréquences, on remplace $z = e^{j2\pi f Te}$. Dans les deux exemples qui suivent Te=1s, donc $f_N = 1/2$ Hz. Le tracé du diagramme se fait uniquement jusqu'à f_N.

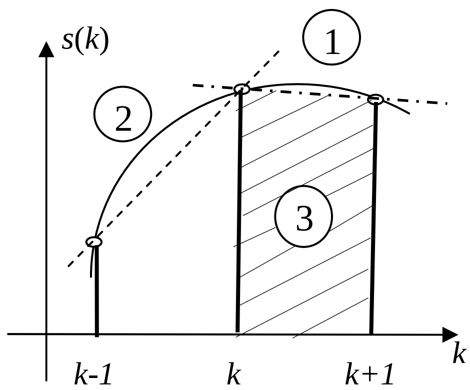
Equation aux différences	H(z)	$H(f)$	Diagramme
$s(k) = \frac{1}{2}\left(e(k) + e(k-1)\right)$	$\frac{1}{2}\left(1 + z^{-1}\right)$	$\cos(\pi f).e^{-j\pi f}$	

$s(k) = s(k-1) + e(k-1)$	$\dfrac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$	$\dfrac{0.5}{\sin(\pi f)}.e^{-j(\pi f + \pi/2)}$	

1.8. Relations entre les modèles à temps continu et à temps discret

La discrétisation de l'opérateur de *Laplace* $\boldsymbol{p}$ (opérateur dérivée) peut se faire selon les trois méthodes suivantes :

$p :\Rightarrow \dfrac{z-1}{T_e}$; $\dfrac{1-z^{-1}}{T_e}$ ou $\dfrac{2}{T_e}\dfrac{z-1}{z+1}$ en utilisant l'approximation de l'expression : $z = e^{pT_e}$

N°	$z = e^x$	$z \approx 1+x$	p	Interprétation
1	$z = e^{pT_e}$	$1+pT_e$	$\dfrac{z-1}{T_e}$	
2	$z^{-1} = e^{-pT_e}$	$1-pT_e$	$\dfrac{1-z^{-1}}{T_e}$	
3	$z = e^{p(T_e/2 + T_e/2)}$ $= \dfrac{e^{pT_e/2}}{e^{-pT_e/2}}$	$\dfrac{1+pT_e/2}{1-pT_e/2}$	$\dfrac{2}{T_e}\dfrac{z-1}{z+1}$	