

CHAPITRE DEUX

STABILITE ET PERFORMANCES

DES SYSTEMES ECHANTILLONNES ASSERVIS

2.1 Mise en équation des asservissements échantillonnés :

Comme il a été mentionné au premier chapitre, un système échantillonné utilise des signaux à temps discret constitués d'échantillons, ce qui implique forcément lors de la mise en équation de ce type de systèmes de manipuler les échantillons sous forme d'équations dites aux différences. Dans le domaine en z (symbolique), plus simple encore, les transferts en z (ou transmittance Entrée/Sortie) permettent la modélisation des asservissements échantillonnés.

La Fig. 2.1 montre le calcul de la transmittance en z de deux transferts en cascade

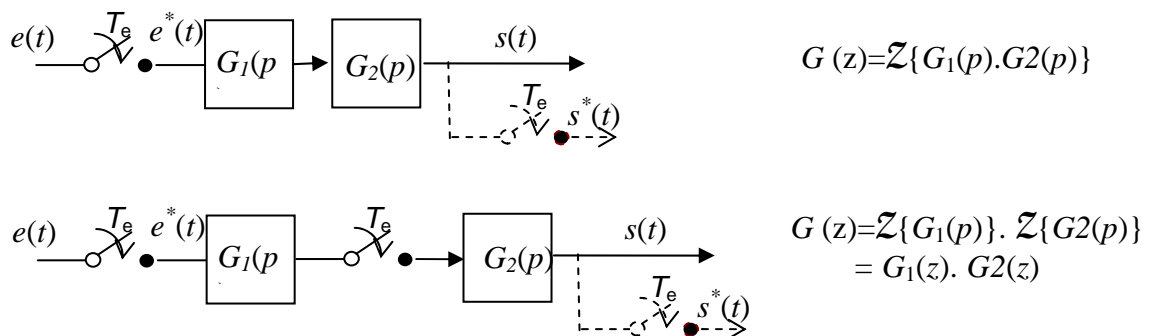


Fig 2.1. Cascade de deux fonctions de transfert

Le schéma fonctionnel d'un asservissement échantillonné est donné dans la Fig. 2.2.

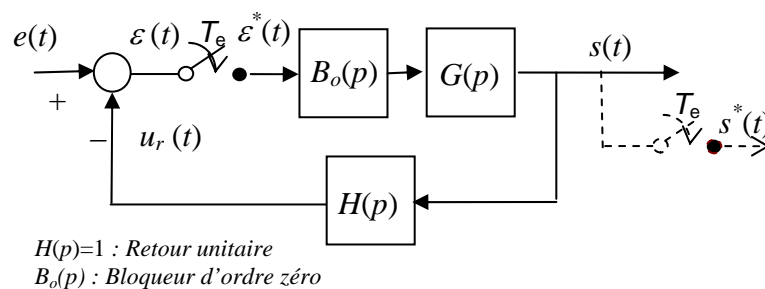


Fig 2.2. Asservissement échantillonné

a- Fonction de transfert en boucle ouverte (BO) :

$$T(z) = \frac{U_r(z)}{E(z)} = \mathcal{Z}\{B_o(p).G(p).H(p)\} \quad (2.1)$$

a- Fonction de transfert en boucle fermée (BF) :

$$F(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \mathcal{Z}\{B_o(p).G(p)\} / (1+T(z)) \quad (2.2)$$

2.2 Stabilité des asservissements échantillonnés :

2.2.1 Condition de stabilité

Comme pour le cas continu, la stabilité des systèmes LIT est liée aux pôles de la fonction de transfert. Pour qu'il y ait une décroissance en exponentiel de la réponse impulsionnelle les pôles doivent être à partie réelle négative :

$$\mathcal{Re}\{p_i\} < 0 \quad (2.3)$$

En revenant au passage continu–discret, la condition (2,3) appliquée à $z = e^{pT_e}$ donne :

$$|z_i| < 1 \quad (2.4)$$

Donc, pour que le système échantillonné soit stable, il faut que tous les pôles z_i soient de module inférieur à 1, ce qui est illustré, sur la figure 2.3, par le passage du demi plan gauche dans le plan en p vers l'intérieur du cercle unité dans le plan en z .

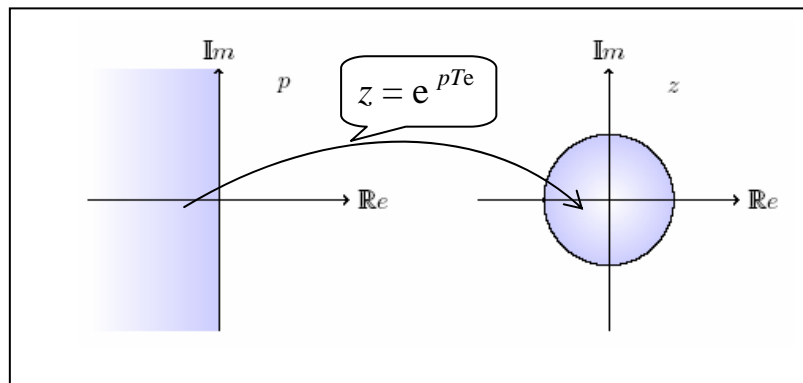


Fig. 2.3 : Zones de stabilité des pôles en p (continu) et en z (discret)

2.2.2 Critères algébriques :

a- Routh

Le critère de Routh (appelé parfois *Routh-Hurwitz*) est déjà rencontré pour le cas des systèmes LIT à temps continu. Pour le cas discret, il s'applique après transformation de l'équation en z en w , dite bilinéaire, telle que :

$$w = \frac{z-1}{z+1} \Rightarrow z = \frac{1+w}{1-w} \quad (2.5)$$

Soit :
$$B(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_1 z^1 + a_0 = 0 \quad (2.6)$$

l'équation issue du dénominateur de la fonction de transfert.

Le passage de z en w en utilisant (2.5), donne :

$$B(w) = c_n w^n + c_{n-1} w^{n-1} + c_{n-2} w^{n-2} + \dots + c_1 w^1 + c_0 = 0 \quad (2.7)$$

La table de *Routh* s'établit comme suit :

| | | | | | | | |
|-------|-----------|----------------|----------------|----------------|-----------|-----|------------------------------------|
| 1- | w^n | c_n | c_{n-2} | c_{n-4} | c_{n-6} | ... | } Coefficients de l'équation (2.7) |
| 2- | w^{n-1} | c_{n-1} | c_{n-3} | c_{n-5} | ... | ... | |
| 3- | w^{n-2} | α_{n-2} | α_{n-3} | α_{n-4} | | | } Termes à calculer) |
| 4- | w^{n-3} | β_{n-3} | β_{n-4} | ... | | | |
| . | . | . | . | . | | | |
| . | . | . | . | . | | | |
| w^0 | . | . | . | . | | | |

Système stable : Termes de même signe

Le calcul se fait comme donné ci-après :

Ligne 03 : $\alpha_{n-2} = \frac{c_{n-1}c_{n-2} - c_n c_{n-3}}{c_{n-1}}$; $\alpha_{n-3} = \frac{c_{n-1}c_{n-4} - c_n c_{n-5}}{c_{n-1}}$; $\alpha_{n-4} = \frac{c_{n-1}c_{n-6} - c_n c_{n-7}}{c_{n-1}}$

Ligne 04 : $\beta_{n-3} = \frac{\alpha_{n-2}c_{n-3} - c_{n-1}\alpha_{n-3}}{\alpha_{n-2}}$; $\beta_{n-4} = \frac{\alpha_{n-2}c_{n-5} - c_{n-1}\alpha_{n-4}}{\alpha_{n-2}}$; ...

Le système est stable si et seulement si les termes de la 2^{ème} colonne ont le même signe.

b- Jury

Le critère de *Jury* s'applique directement sur l'équation en z . Des conditions sont à vérifier selon le degré du polynôme $B(z)$ (2.6), soit n ce degré, le nombre de conditions à vérifier est $n+1$ ($b_n > 0$) :

o $n=2$: 1- $|b_0| < b_2$; 2- $B(1) > 0$; 3- $B(-1) > 0$

o $n=3$: 1- $|b_0| < b_3$; 2- $b_0^2 - b_3^2 < b_0 b_2 - b_1 b_3$; 3- $B(1) > 0$; 4- $B(-1) < 0$

2.2.3 Critères graphiques :

Les critères graphiques sont les mêmes que ceux utilisées en continu. Ils permettent, outre stabilité/instabilité, de mesurer le degré de stabilité des asservissements à travers la notion de marge de stabilité (marge de gain ΔG et marge de phase $\Delta\phi$, Fig. 2.5).

Toutefois, le tracer des diagrammes (*Bode*, *Nyquist*, *Black-Nichols*) doit tenir compte de

la transformation Continu-Discret : $z = e^{j\omega t}$ ou bien $w = \frac{z-1}{z+1}$. La pulsation ω reste dans

l'intervalle $[0 \ \omega_N]$ où ω_N est la pulsation de *Nyquist* ($\omega_N = \omega_e/2 = \pi/T_e$).

Etant donné le système asservi échantillonné de la figure 2.4, où K est le gain de la boucle d'action. La fonction de transfert en boucle ouverte est : $T(z) = \mathcal{Z}\{K.G(p)\}$

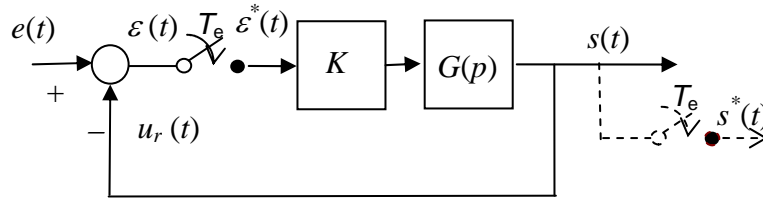


Fig 2.4. Système asservi échantillonné avec un gain K

a- Nyquist :

En utilisant $z = e^{j\omega T_e}$ et $w = \frac{z-1}{z+1}$, on obtient :

$$w = j \operatorname{tg}(\omega T_e / 2) \quad (2.8)$$

qui lorsque ω varie de 0 à $\omega_N = \pi / T_e$, la tangente varie de 0 à $+\infty$.

Si on pose : $v = \operatorname{tg}(\omega T_e / 2)$, (2.8) devient : $w = jv$. Il est à noter que v n'a pas la signification d'une pulsation (pulsation fictive) mais elle varie de 0 à $+\infty$ chose qui permet d'utiliser le lieu de *Nyquist* comme dans le dans des systèmes à temps continu.

Le tracer se fait pour un ensemble de valeurs de v :

$$v \rightarrow \omega = 2 / T_e \operatorname{arctg}(v) \rightarrow w = j \operatorname{tg}(\omega T_e / 2) \rightarrow T(w) \rightarrow \operatorname{Re}\{T(w)\} \text{ et } \operatorname{Im}\{T(w)\}$$

o Critère du revers (*Nyquist* simplifié):

Un système est stable en boucle fermée, si en parcourant le lieu dans le sens des pulsations croissante, le point critique (-1) est laissé à gauche

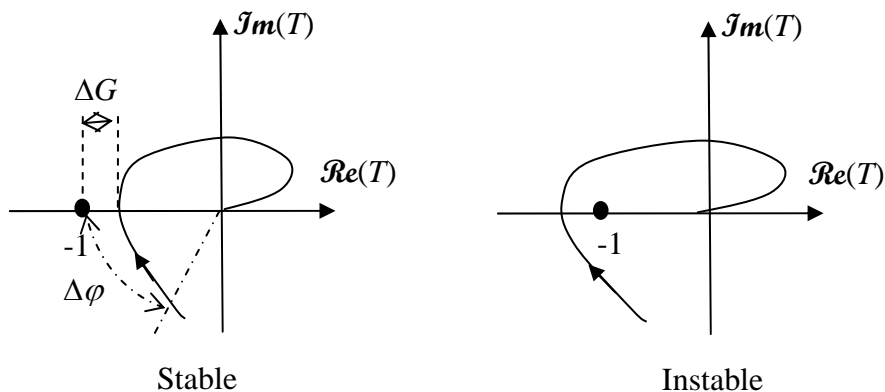


Fig 2.5. Critère du revers

b- Bode

Comme pour le cas de *Nyquist*, le diagramme de *Bode* peut être tracé (même asymptotique) module et phase de T pour évaluer la stabilité relative par les marges de gain et de phase.

2.3 Asservissements continus commandés ou corrigés en temps discret :

Dans un asservissement échantillonné, le calculateur numérique assure la comparaison des signaux consigne et retour et la correction via un régulateur numérique de fonction de transfert $C(z)$ (Fig. 2.6), qui est programmé par l'utilisation de l'équation aux différences (de récurrence).

L'interfaçage calculateur numérique–Système à temps continu et inversement se fait respectivement par conversion numérique analogique (CNA) et analogique numérique (CAN). Des problèmes s'ajoutent alors par rapport au continu, en l'occurrence ceux engendrés par l'opération d'échantillonnage et les erreurs dues à la quantification.

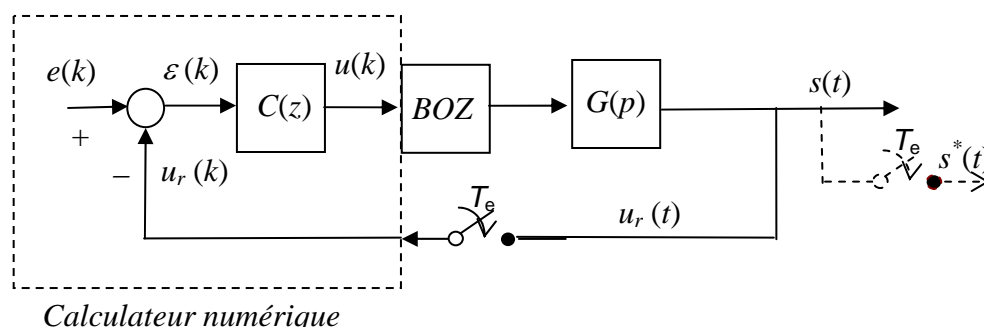


Fig 2.6. Système asservi échantillonné corrigé en temps discret

L'analyse et la synthèse des asservissements échantillonnés peut se faire de deux manières :

- Dans le domaine en z (temps discret) : On travaille le tout en z . Pour le calculateur, il est, de nature, discret, seule la partie continue est transformée dans le domaine en z .
- Dans le domaine en p (temps continu) : c'est de travailler dans le domaine à temps continu. La partie numérique est ramenée dans le domaine de Laplace avec une approximation du *BOZ* qui le sachant contient un retard pur.

2.4 Précision des asservissements échantillonnés :

Le système asservi considéré pour l'étude de la précision est donné par la figure 2.7. Il reçoit deux entrées : la consigne et la perturbation.

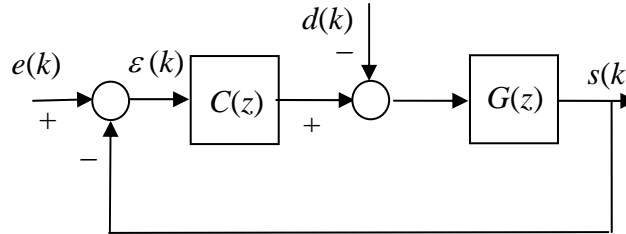


Fig 2.7. Système asservi échantillonné régulé par C(z)

2.4.1. Précision vis-à-vis de la consigne (d(k)=0):

La précision des asservissements est mesurée par l'erreur statique (en régime permanent) qui est la différence entre le signal de consigne et la réponse du système. Si on prend le cas de la figure 2.7, avec C(z)=K (un proportionnel) et G(z)=Z{ G(p)}, l'erreur se calcul facilement comme :

$$\epsilon(z) = \frac{E(z)}{1 + K.G(z)} \tag{2.9}$$

avec : $\epsilon(z) = Z\{\epsilon(k)\}$ et $E(z) = Z\{e(k)\}$

On constate de (2.9) que, l'erreur dépend du signal de consigne e(k). La valeur de cette erreur au régime permanent est calculée comme suit :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \epsilon(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \frac{E(z)}{1 + K.G(z)} \tag{2.10}$$

C'est le théorème de la valeur final qui permet ce calcul dans le domaine en z.

Le tableau 2.1 résume les différentes erreurs calculées en fonction du signal de consigne et de la classe (ou type) définie par le nombre d'intégration (l'intégration due au BOZ n'est pas comptabilisée). Par abus de langage, on utilise le mot « intégration » qui, en discret, est une « sommation (Σ) » :

$$\int_0^t dt \xrightarrow{\text{Laplace}} \frac{1}{p} \quad \& \quad \sum_0^k \xrightarrow{z} \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \quad (*)$$

(*) L'opérateur dérivée p en discret c'est : 1-z⁻¹ (Euler).

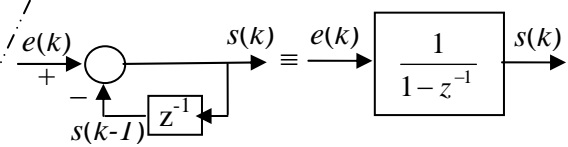
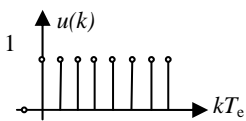
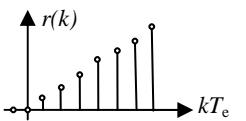
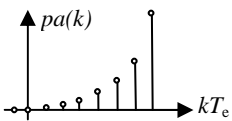


Fig. 2.8 Réalisation de l'opérateur « somme » en discret

| Classe du Système ≡ Nbre d'intégration | Echelon  | Rampe  | Parabole  |
|--|--|---|---|
| | Erreur de position : ε_p | Erreur de vitesse : ε_v | Erreur d'accélération : ε_a |
| 0 | $\frac{1}{1+K}$ | ∞ | ∞ |
| 1 | 0 | $\frac{T_e}{K}$ | ∞ |
| 2 | 0 | 0 | $\frac{2T_e^2}{K}$ |
| 3 | 0 | 0 | 0 |

Tab. 2.1 Erreur permanente en fonction de l'entrée et de la classe du système en l'absence de perturbation.

- Transformées des signaux échelon, rampe et parabole, correspondant respectivement aux erreurs dites de *position*, de *vitesse* et d'*accélération*

| Signal \ Transformée | Echelon : $u(t)$ $u(k)$ | Rampe : $r(t)$ $r(k)$ | Parabole : $pa(t)$ $pa(k)$ |
|----------------------|--------------------------------------|---|--|
| Continu | $\frac{1}{p}$ | $\frac{1}{p^2}$ | $\frac{2}{p^3}$ |
| Discret | $\frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}$ | $\frac{T_e z}{(z-1)^2} = \frac{T_e z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$ | $\frac{T_e^2 z(z+1)}{(z-1)^3} = \frac{T_e^2 z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$ |

Tab. 2.2 Transformées de *Laplace* et en z des signaux usuels

2.4.1. Précision vis-à-vis de la perturbation ($e(k)=0$):

La perturbation $d(k)$ est supposée égale à l'échelon unité :

$$\varepsilon(z) = \frac{D(z)G(z)}{1+C(z).G(z)} \quad (2.11)$$

La valeur de l'erreur au régime permanent est calculée comme suit :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \varepsilon(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \frac{\frac{1}{1-z^{-1}} G(z)}{1+C(z).G(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{G(z)}{1+C(z).G(z)} \quad (2.12)$$

(2.12) montre que l'erreur due à la perturbation est nulle s'il y a une intégration en amont de la perturbation.

2.5 Performances dynamiques d'un système échantillonné :

Les performances dynamiques d'un système sont mesurées en terme de quantités temporelles sur la réponse transitoire du système. Dans la pratique, puisque les systèmes à asservir sont en majorité à temps continu, les réponses (sorties) le sont aussi (à temps continu). De plus les signaux de commande issus du calculateur numérique sont « convertis » du temps discret au temps continu via un BOZ (Restitution). Et comme les réponses de la majorité des systèmes exhibent un transitoire oscillatoire amorti, les caractéristiques temporelles d'un second ordre fondamental peuvent décrire les performances dynamiques de ces systèmes :

$$G(p) = \frac{\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2} = \frac{1}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + 2\xi \frac{p}{\omega_n} + 1} \quad (2.13)$$

soit :

$$G(z) = \frac{1 + e^{-2\sigma T_e} - 2e^{-\sigma T_e} \cos(\omega_p T_e)}{z^2 - 2e^{-\sigma T_e} \cos(\omega_p T_e) z + e^{-2\sigma T_e}} \quad (2.14)$$

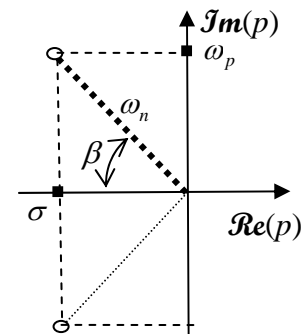
avec : ω_n , la pulsation naturelle, ξ le facteur d'amortissement

et, $\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$, $\sigma = \xi\omega_n$

Les caractéristiques temporelles, qui peuvent être calculées, sont données dans le tableau 2.3.

La réponse indicielle (continue) est donnée dans ce cas par :

$$s(t) = 1 - \frac{\omega_n}{\omega_p} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_p t + \beta) \quad \text{et} \quad \beta = \arccos(\xi) \quad (2.15)$$



| Caractéristique | Formule |
|---|---|
| Temps de montée : t_m 10 à 90% de la valeur finale | $t_m = \frac{\pi - \beta}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$ |
| Premier Dépassement : t_{D1} | $t_{D1} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$ |
| D_1 | $D_1 = 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1 - \xi^2}}}$ en %. |
| Temps de réponse à $\pm 5\%$: t_{r5} | $t_{r5} = \frac{3}{\xi\omega_n}$ |
| Temps de réponse à $\pm 2\%$: t_{r2} | $t_{r5} = \frac{4}{\xi\omega_n}$ |

Tab. 2.3 Caractéristiques temporelles d'un second ordre fondamental

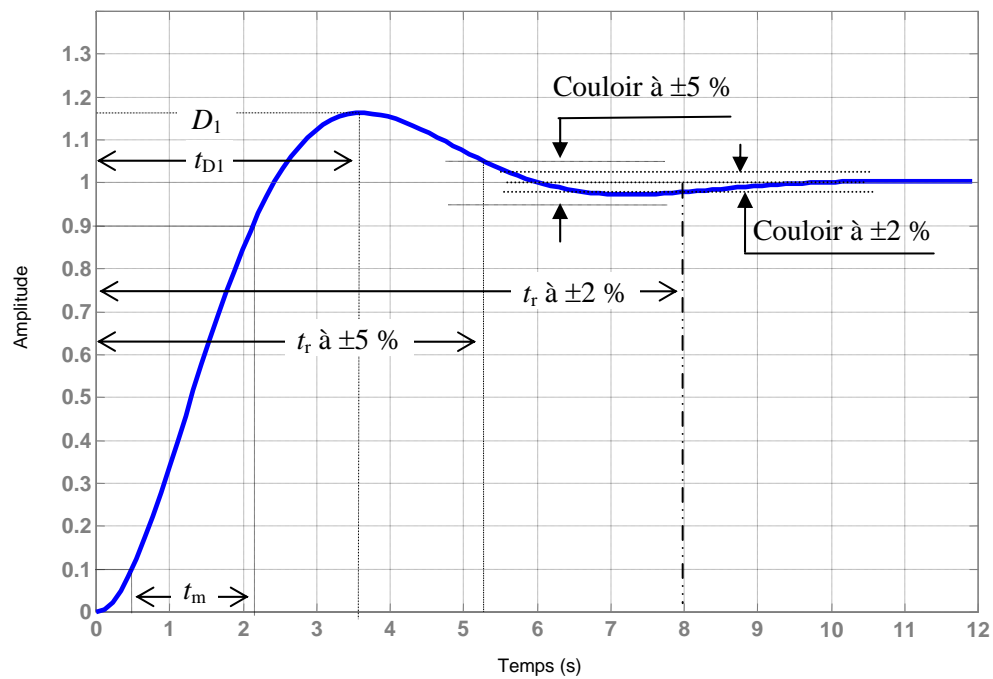


Fig. 2.9 Spécifications temporelles de la réponse transitoire d'un second ordre fondamental

Le tableau qui suit donne des valeurs approximatives de β et de D_1 en fonction de ξ .

| ξ | β (°) | D_1 (%) |
|-------|-------------|-----------|
| 1.000 | 00 | 00 |
| 0.707 | 45 | 05 |
| 0.450 | 60 | 20 |
| 0.200 | 80 | 25 |

Tab. 2.4 Quelques valeurs de ξ , β et D_1