Université de Batna-2-
Faculté de Technologie
Département d'Electrotechnique

Master : Energies Renouvelables en Electrotechnique
Unité : Méthode Numériques Appliquées et Optimisation
Année : 2020/2021

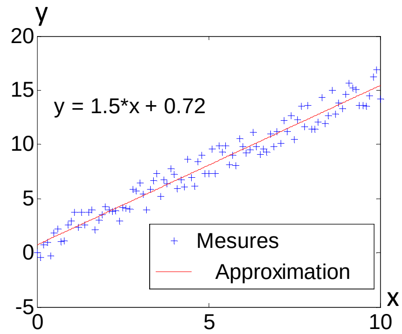
TP N°6
Optimisation quadratique
(Méthode des moindres carrés)

1. Objectif :

Le but de ce TP est de résoudre un problème d'optimisation quadratique en l'absence de contraintes. La méthode à utiliser est celle des moindres carrés : Least Square Method (LSM).

2. Droite des moindres carrés :

Soit un nuage de points $(x_i ; y_i)$, *i=1,..,n* obtenu par mesures, comme le montre la figure ci-contre. Le problème est de déterminer l'équation de la droite (le modèle) représentative de l'évolution du nuage de points :



$$y = \hat{a}\,x + \hat{b} = \begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = X.\Theta$$

Pour l'ensemble des mesures $(x_i ; y_i)$, on écrit :

$$\begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ . & . \\ . & . \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix} \qquad \text{soit : } X\ \Theta = Y\ ,$$

et le problème revient à minimiser la somme des erreurs quadratique (la fonction objective) :

$$J = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - (\hat{a}x_i + \hat{b})\right]^2$$

soit en annulant les composantes du gradient de $J/(\hat{a};\hat{b})$: $\dfrac{\partial J}{\partial \hat{a}} = 0$ et $\dfrac{\partial J}{\partial \hat{b}} = 0$, on obtient :

$$\begin{cases} \hat{a} = \dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i . \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i . \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \\ \hat{b} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - \hat{a}.\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - \hat{a}.\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \end{cases}$$

La minimisation du critère J peut mener aussi à résoudre le système d'équations linéaires :

$$X^T X\ \Theta = X^T Y$$

3. « Polynôme » des moindres carrés :

Dans le cas où l'on n'arrive pas à approcher correctement le nuage de points par la droite, extension est faite au polynôme : $p(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + ... + a_1 x\ + a_0$, la droite en est un cas particulier pour k=1.

4. Travail demandé

4.1 - Ecrire un programme Matlab pour générer un nuage de points $(x_i ; y_i)$ proche d'une droite.

- Déterminer de trois manières différentes les paramètres $\hat{a}$ et $\hat{b}$ de la droite modèle.

4.2 - Ecrire un programme Matlab pour générer un nuage de points $(x_i ; y_i)$ proche d'une parabole.

- Déterminer les paramètres $\hat{a}_2$, $\hat{a}_1$ et $\hat{a}_0$ de la parabole modèle en uilisant $X^T X\ \Theta = X^T Y$