Chapitre 3 : Etats de Contrainte et de Déformation

Enseignant : Dr. Noui Abdelkader

Institut des Séances de la terre et de L'univers, Université Batna 2
Batna 05078, Algérie

Les contraintes et les déformations constituent l'outil principal de mesure de la résistance et de la rigidité des éléments. En d'autres termes ce sont les quantités de base d'appréciation de l'état et du comportement des éléments sous l'effet des charges. Nous considérions les corps solides assimilés à des milieux continues, homogènes, isotropes et parfaitement élastiques.

1. Notion de contrainte

Les efforts internes engendré par des forces extérieures, ne sont que les résultantes des efforts élémentaires agissant sur chaque section de l'élément sollicité par les forces extérieures. On appelle ces efforts élémentaires, *contraintes*.

Découpons un corps en équilibre sous l'action des forces extérieures F_i en deux parties (*A*) et (*B*), et considérons l'équilibre de l'une des deux parties (Fig. 1).

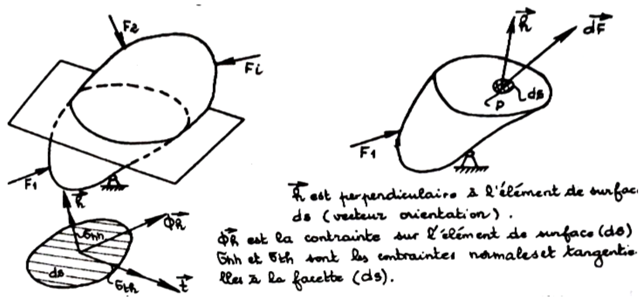

Fig. 1 Découpage d'un corps

La partie (*B*) par exemple est en équilibre sous l'action des forces extérieures qui lui sont directement appliquées et des réactions exercées de la part de (*A*) sur (*B*). Chaque élément de surface '*ds*' de la surface de séparation reçoit donc de la part de (*A*) une force '*df*' (Fig. 1).

La contrainte est par définition la limite du rapport suivant :

$$\sigma = \lim_{ds \to 0} \frac{df}{ds} \qquad (1)$$

L'élément de surface '*ds*' est défini par son vecteur normal dirigé à l'extérieur ($\vec{h}$).

σ_{hh} et σ_{ht} sont les composantes de la contrainte σ projetée sur le vecteur $\vec{h}$ et $\vec{t}$ respectivement normal et tangent à la facette (Fig. 1). D'habitude on considère les composantes de la contrainte σ sur le système d'axe (xyz) ou (123). Les composantes sont accompagnées de deux indices. Le premier indique l'axe sur le quel est projetée la contrainte et le deuxième indique la direction de la normale.

Si la surface de séparation est parallèle à l'un des trois plans (12, 23 ou 31), la normal $\vec{h}$ coïncide avec l'un des trois axes. Par exemple sur la *Figure 2* la surface de séparation est parallèle au plan 31.

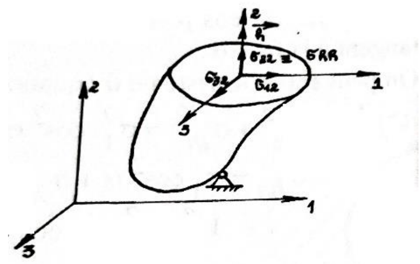

Fig. 2 Surface de separation en parallèle avec le plan 31

La normal $\vec{h}$ coïncide avec l'axe 2. On a alors :

- σ_{22} : contrainte normale à la facette d'orientation (2) ;
- σ_{32}, σ_{12} : contrainte tangentielle suivant les directions 3 et 1.

Si la normal $\vec{h}$ coïncide avec la direction positive de l'un des axes, la contrainte normale est comptée comme positive. Les contraintes tangentielles sont positives si elles se projettent dans le même sens que les axes, et le contraire est vrai.

2. Equations d'équilibre (NAVIE) et réciprocité des contraintes tangentielles

Considérons un corps en équilibre sous l'action d'un système de forces extérieures et découpons de ce corps un parallélépipède aux dimensions (da_1, da_2 et da_3) au voisinage du point (*P*) (Fig. 3).

Sur chaque face du parallélépipède il y a trois composantes de contraintes inconnues. Par conséquent, le nombre de contrainte total inconnues est égale à 18. On diminue le nombre d'inconnues en négligeant les termes d'ordre supérieur pendant le développement des expressions des contraintes.

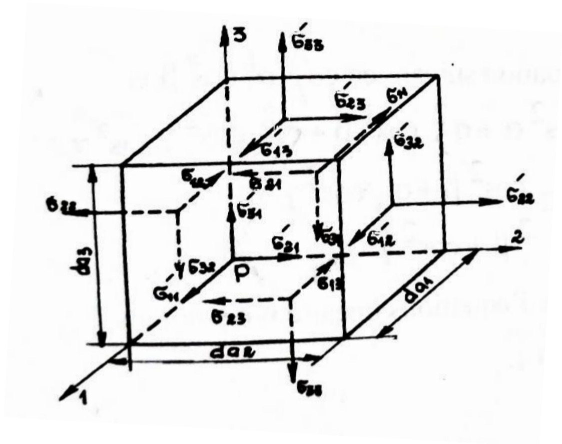

Fig. 3 Etat de contraintes

Par exemple sur la facette d'orientation l'axe n° 1, la contrainte est une fonction de (a_1, a_2, a_3).

$$\sigma_{11} = f\ (a_1, a_2, a_3) \tag{2}$$

La contrainte sur la facette parallèle à cette dernière à la distance da_1 est :

$$\sigma'_{11} = f\ (a_1 + da_1, a_2, a_3) \tag{3}$$

Développant cette expression et négligeant les termes d'ordre supérieur en tant qu'infiniment petits :

$$f\ (a_1 + da_1, a_2, a_3) = f\ (a_1, a_2, a_3) + \frac{\partial f\ (a_1, a_2, a_3)}{\partial a_1} da_1 \tag{4}$$

Autrement :

$$\sigma'_{11} = \sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial a_1} da_1 \tag{5}$$

De la même manière on aura :

$$\begin{aligned}
\sigma'_{11} &= \sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial a_1} da_1 & \sigma'_{21} &= \sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial a_1} da_1 \\
\sigma'_{31} &= \sigma_{31} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial a_1} da_1 & \sigma'_{22} &= \sigma_{22} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial a_2} da_2 \\
\sigma'_{12} &= \sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial a_2} da_2 & \sigma'_{32} &= \sigma_{32} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial a_2} da_2 \\
\sigma'_{33} &= \sigma_{33} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial a_3} da_3 & \sigma'_{13} &= \sigma_{13} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial a_3} da_3
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\sigma'_{23} = \sigma_{23} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial a_3} da_3$$

En conséquent de (18) contraintes inconnues, il ne reste que (9).

- σ_{11}, σ_{22}, σ_{33} : contraintes normales ;
- σ_{21}, σ_{31}, σ_{23}, σ_{12}, σ_{13}, σ_{32} : contraintes tangentielles.

Ces (9) contraintes sont regroupées dans une matrice d'ordre 3 dite matrices des contraintes ou tenseur de contrainte.

$$(\sigma) = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}$$

- L'indice(i) : marque la direction de projection ;
- L'indice (j) : marque la normale de la facette.

Pour ($i = j$) les contraintes sont dites normales. Lorsque ($i \neq j$) les contraintes sont dites tangentielles.

Considérons les forces de contrainte comme les forces superficielle. Ecrivons les équations d'équilibre du parallélépipède :

$$\begin{aligned}
\sum F/1 &= 0 & \sum M\ /1 &= 0 \\
\sum F/2 &= 0 & \sum M\ /2 &= 0 \\
\sum F/3 &= 0 & \sum M\ /3 &= 0
\end{aligned} \tag{7}$$

Ecrivons d'abord la première équation :

$$\begin{aligned}
&\left(\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial a_1} da_1\right) da_2 da_3 - \sigma_{11} da_2 da_3 + \\
&\left(\sigma_{13} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial a_3} da_3\right) da_1 da_2 - \sigma_{13} da_1 da_2 + \\
&\left(\sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial a_2} da_2\right) da_2 da_3 - \sigma_{12} da_2 da_3 = 0
\end{aligned} \tag{8}$$

Après simplification:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial a_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial a_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial a_3} = 0 \tag{9}$$

De la même manière on peut obtenir deux autres équations, ce qui donne les trois équations d'équilibre :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial a_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial a_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial a_3} + F_1 &= 0 \\
\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial a_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial a_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial a_3} + F_2 &= 0 \\
\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial a_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial a_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial a_3} + F_3 &= 0
\end{aligned} \tag{10}$$

Ce sont les équations d'équilibre ou les équations de NAVIE.

Ecrivons à présent une équation des moments de toute les forces par rapport à l'axe 2 :

$$\begin{aligned}
&\left(\sigma_{11}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial a_1}da_1\right)da_2da_3.\frac{da_3}{2}-\sigma_{11}da_2da_3.\frac{da_3}{2}-\\
&\left(\sigma_{33}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial a_3}da_3\right)da_1da_2.\frac{da_1}{2}+\sigma_{33}da_1da_2.\frac{da_1}{2}+\\
&\left(\sigma_{13}+\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial a_3}da_3\right)da_1da_2.da_3-\left(\sigma_{31}+\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial a_1}da_1\right)\\
&da_1da_2.da_3+\left(\sigma_{12}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial a_2}da_2\right)da_1da_3.\frac{da_3}{2}-\\
&\sigma_{12}da_1da_3.\frac{da_3}{2}-\left(\sigma_{32}+\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial a_2}da_2\right)da_1da_3.\frac{da_1}{2}+\\
&\sigma_{32}da_1da_3.\frac{da_1}{2}=0
\end{aligned} \qquad (11)$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur, toute simplification faites, on obtient : $\sigma_{13} = \sigma_{31}$.

En écrivant les deux équations de moment par rapport aux axes 1 et 3, on obtient : $\sigma_{21} = \sigma_{12}$ et $\sigma_{32} = \sigma_{23}$.

Ces trois égalités expriment la loi de réciprocité de contrainte tangentielle. En vertu de la loi de réciprocité, le nombre de contraintes inconnues est diminué à 3.

Pour obtenir les valeurs des six contraintes inconnues, nous disposons jusqu'ici que de trois équations différentielles d'équilibre.