Université Batna 2.
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique.
Département d'Informatique.
Année universitaire 2020-2021.

Cours de Méthodes Numériques

Chapitre 2 : Méthodes directes de résolution des systèmes linéaires

Mme OTSMANE Sarah

Chapitre 02 : Méthodes directes de résolution des systèmes linéaires

Chapitre 02 : Méthodes directes de résolution des systèmes linéaires.

Position du problème :

On appelle système d'équations linéaires d'ordre $n, (n \in \mathbb{N}^*)$, une expression de la forme :

$$AX = b \qquad (1)$$

Où $A = (a_{ij}), 1 \leq i,j \leq n,$ désigne une matrice carrée d'ordre n de nombre réels ou complexes, $b = (b_i), 1 \leq i \leq n,$ vecteur colonne réel et $X = (x_i), 1 \leq i \leq n,$ est le vecteur (colonne) des inconnues du système.

La relation (1) équivaut aux équations :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad 1, \dots, n.$$

La matrice A est dite régulière (inversible) si $\det(A) \neq 0$; on a l'existence et l'unicité de la solution X. On cherche a résourdre le système linéaire (1).

Théoriquement, si A est inversible, la solution du système (1) est donnée par la formule de **Cramer** :

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Où A_i est une matrice obtenue à partir de A en remplacant la $i^{ième}$ colonne de A par le vecteur b. Cependant l'application de cette formule est inacceptable pour la résolution pratique des systèmes, car son cout (ou nombre d'opérations) est en $O((n+1)!)$. Par exemple, sur un ordinateur effectuant 10^9 opérations par seconde il faudrait au moins 10^{47} années pour résourdre un système linéaire de seulement 50 équations.

Il faut donc développer les algorithmes alternatifs avec un cout raisonnable. Ce problème est un des plus importants de l'analyse numérique.

L'objet de ce chapitre est de déterminer des méthodes directes pour résoudre les système d'équations linéaires ; en particulier à l'aide d'un algorithme. Ce sont des méthodes qui permettent d'obtenir la solution X de (1), si l'ordinateur faisait des calculs exacts, en un nombre fini (en relation avec n) d'opérations élémentaires.

1. Remarques sur la résolution des systèmes linéaires :

Examinons les deux systèmes linéaires ci-dessous :

$$(A) = \begin{cases} 3x + 5y + 7z = 101 \\ 2x + 10y + 6z = 134 \\ x + 2y + 3z = 40 \end{cases} \qquad (B) = \begin{cases} 2x + 5y + 3z = 49 & (L1) \\ \quad 4y + 2z = 30 & (L2) \\ \quad\quad 7z = 21 & (L3) \end{cases}$$

- ✓ Le système (A) n'est pas très simple à résoudre car les 3 inconnues sont présentes dans les 3 équations.
- ✓ Le système (B) est très simple à résoudre : (L3) donne : z = 3. Puis dans (L2) : 4y +6 = 30 donc y = (30-6)/4 = 6. Enfin dans (L1) : 2x + 30 + 9 = 49 donc x = (49 - 30 - 9)/2 = 5.

Conclusion : On a trouvé la solution du système (B) est $X = (5,6,3)^t$. Le système linéaire (B) est **triangulaire supérieur**.

Problème : les systèmes linéaires se présentent plus souvent sous la forme du système (A) que sous la forme triangulaire supérieure comme le système (B).

Dans toute la suite de ce chapitre, on suppose que $\boldsymbol{A}$ est une matrice inversible de $\mathcal{M}^n(\mathbb{R})$, où $\mathcal{M}^n(\mathbb{R})$, est l'ensemble des matrices carrée d'ordre n à coefficients réels.

2. Systèmes particuliers :

2.1. Systèmes diagonal : Soit $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ où $a_{ij} = 0$, si $i \neq j$ et $a_{ii} \neq 0 \; \forall\, i = 1, \dots, n$. Posons $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^t$. Alors

$$AX = b \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 \\ a_{22}x_2 = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \Longrightarrow \qquad x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}; \qquad i = 1, \dots, n.$$

Donc la solution est $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ où $x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$ avec $i = 1, \dots, n.$

Coût : n divisions.

2.2. Système triangulaire supérieur : Soit $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ où $a_{ij} = 0$, si $i > j$ et $a_{ii} \neq 0 \ \forall \ i = 1, \dots, n.$ Alors :

$$AX = b \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_1 = b_1 \\ \qquad\qquad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_2 = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Donc le système $AX = b$ se résout par la méthode ascendante, c'est-a-dire on trouve x_n puis x_{n-1}, ..., puis x_1: d'où les relations :

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}} \\ x_i = \dfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij x_j}\right) \end{cases} \quad i = 2, \dots, n.$$

Coût :

$\frac{n(n-1)}{2}$ additions (ou soustractions) + $\frac{n(n-1)}{2}$ multiplication + n divisions = n^2 opérations

En effet :
- Le nombre de divisions évident.
- Pour calculer $x_i \ (i = 1, .., n)$, on fait $(n - i)$ additions et $(n - i)$ multiplication d'où :

$$co\hat{u}t(+) = co\hat{u}t(\times) = \sum_{i=1}^{n}(n - i) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

2.3. Système triangulaire inférieur : Soit $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ où $a_{ij} = 0$, si $i < j$ et $a_{ii} \neq 0 \ \forall \ i = 1, \dots, n.$ Alors :

$$AX = b \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \qquad\qquad\qquad = b_2 \\ \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Donc le système $AX = b$ se résout par la méthode ascendante, c'est-à-dire on trouve x_1 puis x_2, ..., puis x_n: d'où les relations :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ x_i = \dfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij x_j}\right) \end{cases} \quad i = 2, \dots, n.$$

Coût : $\frac{n(n-1)}{2}$ additions (ou soustractions), $\frac{n(n-1)}{2}$ multiplication et n division.

Remarque : les coûts des trois méthodes précédentes sont valables (point de vue calcul sur machine) pour n pas assez grand (≤ 100), on s'efforcera donc « dans toute la suite concernant la catégorie des méthodes directes » la transformer la matrice A du système $AX = b$ afin de nous ramener au cas triangulaire (le plus souvent) et même au cas diagonal.

3. Méthodes directes de résolution des systèmes linéaires :

3.1. Méthode d'élimination de Gauss :

Comme les systèmes triangulaires sont faciles et économiques à résoudre, l'objectif est de transformer tout système linéaire en système triangulaire équivalent. Bien que cette méthode soit parmi les plus anciennes qui ont été proposée pour résoudre les systèmes linéaires elle reste encore actuellement la plus utilisée ; en particulier son algorithme est d'exploitation aisée sur micro-ordinateur. La méthode de Gauss se décompose en deux étapes :

1ère Etape > élimination de Gauss : on forme le système triangulaire supérieur équivalent en éliminant tous les termes situés sous la diagonale du système.

2ème Etape > remontée : on résout le système triangulaire supérieur comme on vient de le faire pour le système (B).

1. **Principe de la méthode de Gauss** :

Déterminer une matrice M inversible telle que la matrice MA soit triangulaire supérieure. Alors :

$$AX = b \Leftrightarrow (MA)X = Mb.$$

Ensuite résoudre le système triangulaire supérieur $(MA)X = Mb$ par l'algorithme de remontée.

Remarque : En pratique on ne calcule pas M d'une façon explicite, mais par des transformations équivalentes on ramène le système de départ en un système à matrice triangulaire supérieure.

Autrement dit :

$$(A, b) \longrightarrow transformation \longrightarrow \left(A^{(n)}, b^{(n)}\right).$$

Où $A^{(n)}$ est une matrice triangulaire supérieure, puis on résout le système triangulaire :

$$A^{(n)}X = b^{(n)}.$$

2. Algorithme d'élimination de Gauss :

On pose $A^{(1)} = A$ et $b^{(1)} = b$

$$\begin{array}{cc} \left(A^{(0)} : b^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & \vdots & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{21}^{(1)} & \vdots & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & \vdots & b_n^{(1)} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \leftarrow L_1^{(1)} \\ \leftarrow L_2^{(1)} \\ \vdots \\ \leftarrow L_n^{(1)} \end{array} \end{array}$$

A la 1ère étape : Si $a_{11}^{(1)} \neq 0$ (sinon on fait une permutation de lignes) , on fait les affectations suivantes :

$$\begin{cases} L_1^{(2)} \leftarrow L_1^{(1)} \\ L_2^{(2)} \leftarrow L_i^{(1)} - \alpha_{i1} L_1^{(1)} \qquad ou\ \alpha_{i1} = \dfrac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, 2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

On obtient donc :

$$\begin{array}{cc} \left(A^{(2)} : b^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} & \vdots & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{21}^{(2)} & \vdots & b_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & \vdots & b_n^{(2)} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \leftarrow L_1^{(2)} \\ \leftarrow L_2^{(2)} \\ \vdots \\ \leftarrow L_n^{(2)} \end{array} \end{array}$$

Où :

$$\begin{cases} a_{1j}^{(2)} = a_{1j}^{(1)} \quad 1 \leq j \leq n; \quad b_1^{(2)} = b_1^{(1)} \\ a_{1i}^{(2)} = 0 \quad 2 \leq i \leq n; \\ a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \alpha_{i1} a_{1j}^{(1)} \quad 2 \leq i,j \leq n \\ b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \alpha_{i1} b_1^{(1)} \quad 2 \leq i \leq n \end{cases}$$

A la $k^{\text{ième}}$ étape ($1 \leq k \leq n-1$): Si $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ (sinon on fait une permutation de lignes) , on fait les affectations suivantes :

$$\begin{cases} L_i^{(k+1)} \leftarrow L_i^{(k)} \;, 1 \leq i \leq k \\ L_i^{(k+1)} \leftarrow L_i^{(k)} - \alpha_{ik} L_k^{(k)} \qquad \text{ou } \alpha_{ik} = \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \;, k+1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

On obtient donc :

$$\left(A^{(k+1)} \vdots\, b^{(k+1)}\right) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccccccccc} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(k)} & \vdots & b_1^{(k)} \\ 0 & a_{22}^{(k)} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(k)} & \vdots & b_2^{(k)} \\ \vdots & 0 & \ddots & & & & \vdots & & \\ \vdots & & \ddots & a_{kk}^{(k)} & \cdots & \cdots & a_{kn}^{(k)} & \vdots & b_k^{(k)} \\ \vdots & & & 0 & a_{k+1,k+1}^{(k+1)} & \cdots & a_{k+1,n}^{(k+1)} & \vdots & b_{k+1}^{(k+1)} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 0 & & & 0 & a_{n,k+1}^{(k+1)} & \cdots & a_{n,n}^{(k+1)} & \vdots & b_n^{(k+1)} \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} L_1^{(k+1)} \\ L_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ L_n^{(k+1)} \end{array}$$

Où :

$$\begin{cases} \begin{cases} a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)}, \; 1 \leq j \leq n; \\ b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)}, \end{cases} \qquad 1 \leq i \leq k; \\ a_{ij}^{(k+1)} = 0, \quad 1 \leq j \leq k, \quad k+1 \leq i \leq n; \\ \begin{cases} a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \alpha_{ik} a_{kj}^{(k)}, \quad k+1 \leq j \leq n; \\ b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \alpha_{ik} b_k^{(k)} \end{cases} \qquad k+1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

En réitérant $(n-1)$ fois l'opération on obtient :

$$AX = b \Leftrightarrow A^{(n)}X = b^{(n)}.$$

Avec :

$$A^{(n)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & \mathit{0} & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}, \quad b^{(n)} = \begin{pmatrix} b_1^{(n)} \\ b_2^{(n)} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

$A^{(n)}$ *étant une matrice triangulaire supérieure.*

Remarque :

- ✓ Les $a_{kk}^{(k)}, k = 1, \dots, n,$ sont appelés « pivots de la méthode de Gauss ».
- ✓ La méthode de Gauss permet de calculer $det(A)$ par :

$$\det(A) = (-1)^j \prod_{i=1}^{n} a_{ii}^{(i)} \quad \textit{où } j \textit{ est le nombre de permutations }.$$

- ✓ La méthode de Gauss sans permutation de lignes s'appelle « Gauss ordinaire ».
- ✓ Au cours de la triangularisation, si l'on trouve que l'un des pivots $a_{kk}^{(k)} = 0$, on permute la ligne du pivot avec une ligne supérieure $L_p, k+1 \le p \le n,$ dont l'élément de la $k^{iéme}$ colonne $a_{pk}^{(k)}$ est non nul.

Exemple de la méthode de Gauss :

Soit le système linéaire :

$$AX = b \text{ Avec } A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 16 \end{pmatrix} \; et \; X = \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix}$$

1ère Etape > élimination de Gauss : on forme le système triangulaire supérieur équivalent en éliminant tous les termes situés sous la diagonale du système.

$$[A \vdots b]^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & \vdots & 12 \\ -1 & 3 & -1 & \vdots & -8 \\ 3 & -4 & 2 & \vdots & 16 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \end{matrix}$$

$$[A \vdots b]^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & \vdots & 12 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & \vdots & -2 \\ 0 & 7/2 & 1/2 & \vdots & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \leftarrow L_1 \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \leftarrow L_2 - (1/2)L_1 \\ \leftarrow L_3 \leftarrow L_3 - (3/2)L_1 \end{matrix}$$

$$[A \vdots b]^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & \vdots & 12 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 4 & \vdots & 12 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \leftarrow L_1 \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \leftarrow L_3 - 7L_2 \end{matrix}$$

2ème Etape > **remontée :** on résout le système triangulaire supérieur comme on vient de le faire pour le système (B). et on trouve $X = (2, -1, 3)^t$ solution de système $AX = b$.

3.2. Méthode de la décomposition LU :

1. Principe de la méthode de la décomposition LU :

1ère Etape : Décomposition de la matrice A de façon à la mettre sous la forme $A = LU$ où L est une matrice triangulaire inférieure unitaire et U est une matrice triangulaire supérieure.

2ème Etape > **Résolution :** Le système $AX = b$ devient

$$AX = b \Leftrightarrow L\underbrace{UX}_{Y} = b \Leftrightarrow \begin{cases} LY = b \\ UX = Y \end{cases}$$

Donc la résolution du système $AX = b$ revient à la résolution de deux systèmes triangulaires.

Théorème :

Soit A une matrice telle que les sous matrices principales $A[K] = (a_{ij})_{1 \le i,j \le K}$ de A soient inversibles pour tous $1 \le k \le n$, alors il existe une matrice $L = (L_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ triangulaire inférieure telle que $L_{ii} = 1$, pour $i = 1, .. n$ et une matrice triangulaire supérieure U telle que $A = LU$.
De plus cette décomposition est unique.

2. Détermination des matrices *L* et *U* :

En connaissant $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$, on écrit l'égalité $A = LU$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & \mathit{0} & \\ l_{31} & & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ l_{n1} & & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & \mathit{0} & & \ddots & \vdots \\ & & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

(U contient $\frac{n(n+1)}{2}$ éléments et L contient $\frac{n(n+1)}{2}$ éléments). Par identification on obtient un système linéaire de n^2 équations à n^2 inconnues. En résolvant le système obtenu dans des cas particuliers (n = 2, 3, 4), on constate que la détermination des éléments de L et U cherchés se fait suivant l'algorithme général :

$$\begin{cases} l_{ii} = 1, \quad 1 \leq i \leq n; \\ \begin{cases} u_{1j} = a_{1j}, \ 1 \leq j \leq n; \\ l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}}, \ 2 \leq i \leq n; \end{cases} \\ \begin{cases} u_{mj} = a_{mj} - \sum\limits_{k=1}^{m-1} l_{mk}.u_{kj}, \quad m \leq j \leq n; \\ l_{im} = \left(a_{im} - \sum\limits_{k=1}^{m-1} l_{ik}.u_{km}\right) / u_{mm}, \quad m+1 \leq i \leq n; \end{cases} \quad 2 \leq m \leq n. \end{cases}$$

Résolution : Supposons qu'on veut résoudre le système $AX = b$. Décomposons A sous forme LU, alors $AX = b$ devient $(LU)X = b$ ou encore $L(UX) = b$. Posons $Y = UX$, on cherche alors Y tel que $LY = b$ est un système triangulaire inférieur qu'on résout par la méthode descendante. Y étant trouvé, on cherche X tel que $UX = Y$ est un système triangulaire supérieur qu'on résout par la méthode ascendante.

3. Exemple de la décomposition LU :

1ère Etape : Décomposition de la matrice A de façon à la mettre sous la forme $A = LU$ où L est une matrice triangulaire inférieure unitaire et U est une matrice triangulaire supérieure :

$$A = LU \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} = LU$$

On suppose que :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{11} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Donc :

$l_{11} = l_{22} = l_{33} = 1,\ u_{1j} = a_{1j}\ , 1 \leq j \leq n = 3 \Leftrightarrow \{u_{11} = a_{11}, u_{12} = a_{12}, u_{13} = a_{13}\}$.

Et : $l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}}, 2 \leq i \leq n = 3 \Leftrightarrow \left\{l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}}, l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}}\right\}$.

$$L^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & l_{32} & 1 \end{pmatrix}, \qquad U^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}.$$

De plus on a :

$u_{mj} = a_{mj} - \sum_{k=1}^{m-1} l_{mk}u_{kj}\ , m = 2\ et\ j = \{2,3\} \Leftrightarrow \left\{u_{22} = \frac{1}{2}, u_{32} = -\frac{1}{2}\right\}$
et $l_{im} = \frac{(a_{im} - \sum_{k=1}^{m-1} l_{ik}u_{km})}{u_{mm}},\ m = 2\ et\ i = \{3\} \Leftrightarrow \{l_{32} = 7\}$.

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

A la fin : $u_{mj} = a_{mj} - \sum_{k=1}^{m-1} l_{mk}u_{kj}\ , m = 3\ et\ j = \{3\} \Leftrightarrow \{u_{33} = 4\}$

$$L = L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = U^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2ème Etape > Résolution : Le système $AX = b$ devient :

$$AX = b \Leftrightarrow L\underbrace{UX}_{Y} = b \Leftrightarrow \begin{cases} LY = b \\ UX = Y \end{cases} \quad b = (12, -8, 16)^t$$

On résout le système triangulaire inferieur $LY = b$ on trouve $Y = (12, -2, 12)^t$ ensuit on résout le système triangulaire supérieur $UX = Y$ on trouve $X = (2, -1, 3)^t$.