Université Batna 2.
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique.
Département d'Informatique.
Année universitaire 2020-2021.

Cours de Méthodes Numériques

Chapitre 3 : Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires

Mme OTSMANE Sarah

Chapitre 03 : Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires

Chapitre 03 : Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires

Position du problème :

Quand n est assez grand les méthodes directes ne sont plus envisageables vu le nombre très grand d'opérations à effectuer qui engendre la propagation des erreurs d'arrondi. On a alors recours aux méthodes itératives qui consistent à générer à partir d'un vecteur initial $X^{(0)}$ choisi dans $\mathbb{R}^n$, une suite $(X^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $X^{(n+1)} = F(X^n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} X^{(n)} = X$; où $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un opérateur lié à la méthode.

1. Principe des méthodes itératives :

Ecrivons d'abord la matrice A sous la forme $A = M - N$ où M est inversible, alors :

$$\begin{aligned} AX = b &\Leftrightarrow (M - N)X = b \\ &\Leftrightarrow MX = NX + b \end{aligned}$$

Multiplions les deux côtés par M^{-1}, on aura :

$$\Leftrightarrow X = M^{-1}NX + M^{-1}b.$$

Le principe de toutes les méthodes itératives est le suivant :

- choisir un vecteur $X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.
- générer la suite $(X^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$, telle que $X^{(k+1)} = M^{-1}NX^{(k)} + M^{-1}b$.
- si la suite $(X^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers X^*, alors X^* est la solution du système $AX = b$.

Remarque 01 :

- Le critère d'arrêt se fait, en général, sur l'erreur relative de deux itérés successifs $X^{(k)}$ et $X^{(k+1)}$, c'est à dire :

  $$Test\left(\frac{\| X^{(k+1)} - X^{(k)}\|}{\| X^{(k+1)}\|} < \varepsilon\right),$$

  où ε choisi petit, ou sur l'erreur absolue si $\| X^{(k+1)}\|$ est très petite.
- La méthode itérative est dite convergente si : $\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^n, X^{(k)} \to X^*$ quand $k \to \infty$ où X^* est la solution du système AX = b.

2. Matrice d'itération et les conditions de convergence :

On appelle, pour M et N choisies, matrice d'itération « la matrice $B = M^{-1}N$ ».

2.1. Condition nécessaire de convergence :

Notons par $E^{(k)} = X^{(k)} - X^*$, le vecteur erreur à l'étape ($k \in \mathbb{N}$) , on a :

$$X^* = B\,X^* + M^{-1}b \qquad (1)$$

$$X^{(k)} = B\,X^{(k-1)} + M^{-1}b \qquad (2)$$

En soustrayant (1) de (2), on aura :

$$X^{(k)} - X^* = B(\,X^{(k-1)} - X^*)$$

Alors :

$E^{(k)} = B\left(E^{(k-1)}\right) = B^2\left(E^{(k-2)}\right) = B^3\left(E^{(k-3)}\right) = \cdots = B^k\left(E^{(0)}\right)$, où $E^{(0)}=X^{(0)} - X^*$

Ou encore :

$$X^{(k)} - X^* = B^k(X^{(0)} - X^*)$$

La méthode converge si : $\forall\, X^{(0)}$, $\lim\limits_{k\to+\infty} X^{(k)} = X^*$, ce qui est vraie si :

$$\lim_{n\to+\infty} B^k = 0 \text{ (0 au sens matriciel).}$$

2.2 Condition nécessaire et suffisante de convergence:

Soit $\rho(B) = \max\{|\lambda|, \lambda \text{ } valeur\ propre\ de\ B\}$ le rayon spectral de B. On a le théorème suivant :

Théorème 01:

La suite $(X^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$, définie par :

$$\begin{cases} X^{(0)} \in \mathbb{R}^n \ quelconque \\ X^{(k+1)} = B\,X^{(k)} + M^{-1}b \end{cases}$$

Converge vers X^* , si et seulement si $\rho(B) < 1$.

2.3 Condition suffisante de convergence :

Rappel 01 :

1. Soit $X = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$, les normes définies par :
   - $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
   - $\|X\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$
   - $\|X\|_\infty = max_{1\le i\le n} |x_i|$

   Sont équivalentes.

2. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les normes définies par :
   - $\|A\|_1 = max_{1\le j\le n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right)$
   - $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t.A)}$
   - $\|A\|_\infty = max_{1\le i\le n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right)$

   Sont équivalentes.

Lemme 01 : (Relation entre $\rho(\mathrm{B})$ et $\|B\|$) : $\rho(\mathrm{B}) \le \|B\|_i$, $i = \{1,2,\infty\}$.

Démonstration : Soit λ une valeur propre de B , alors $\exists X \in (\mathbb{R}^*)^n : BX = \lambda X$, et donc :

$\|BX\|_i = \|\lambda X\|_i \Rightarrow |\lambda| \|X\|_i \le \|B\|_i \|X\|_i$, $(X \in (\mathbb{R}^*)^n \; \|BX\|_i \le \|B\|_i \|X\|_i)$.

D'où, $|\lambda| \le \|B\|_i \Rightarrow \rho(\mathrm{B}) \le \|B\|_i$, $i = \{1,2,\infty\}$.

D'après le lemme précédent, on tire que l'existence d'une norme $\| . \|_i$, $i = \{1,2,\infty\}$. de B qui vérifie $\|B\|_i < 1$ est une condition suffisante pour la convergence de la méthode itérative.

3. Principales méthodes itératives :

On considère la décomposition suivante de la matrice A

$$A = D - E - F = \begin{pmatrix} & & -F \\ & D & \\ -E & & \end{pmatrix}$$

Où :

$$\begin{cases} D : la\ diagonale\ de\ A, \\ -E : la\ partie\ au\ dessous\ de\ la\ diagonale\ de\ A, \\ -F : la\ partie\ au\ dessus\ de\ la\ diagonale\ de\ A. \end{cases}$$

Exemple 01: Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ alors :

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a_{21} & 0 & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & 0 & -a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On suppose que $\forall\, i = 1, \dots, n, a_{ii} \neq 0_{\mathbb{R}}$, (on peut s'y ramener si A estinversible).

1. Méthode de Jacobi : $M = D,\ N = E + F$.
2. Méthode de Gauss-Seidel : $M = D - E, \quad N = F$.

Remarque 02:

1. Si ω , la méthode de relaxation coïncide avec celle de Gauss-Seidel.
2. La matrice M est inversible, car elle possède toujours les a_{ii} sur la diagonale.

4. Présentation des algorithmes :

On va, dans ce qui suit, expliciter les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel, et cela sur un système linéaire à trois équations (n = 3).

Soit $AX = b$ où $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, donc :

$$AX = b \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 & (1) \\ a_{12}\, x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 & (2) \\ a_{13}\, x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 & (3) \end{cases}$$

Les $a_{ii}, i = 1,2, \dots, n$ étant supposés non nuls ; tirons x_1 de (1), x_2 de (2) et x_3 de (3), on obtient :

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} = f(x_2, x_3) \qquad (4)$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{12}\, x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}} = g(x_1, x_3) \qquad (5)$$

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{13}\, x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}} = h(x_1, x_2) \qquad (6)$$

Soit $X^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\right)^t \in \mathbb{R}^3$ quelconque.

<u>La méthode de Jacobi revient au processus itératif suivant :</u>

1ère étape :

$$\begin{matrix} x_1^{(1)} = f\left(x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\right) \\ x_2^{(1)} = g\left(x_1^{(0)}, x_3^{(0)}\right) \\ x_3^{(1)} = h\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right) \end{matrix} \rightarrow X^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix}$$

2ième étape :

$$\begin{matrix} x_1^{(2)} = f\left(x_2^{(1)}, x_3^{(1)}\right) \\ x_2^{(2)} = g\left(x_1^{(1)}, x_3^{(1)}\right) \\ x_3^{(2)} = h\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right) \end{matrix} \rightarrow X^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix}$$

Et ainsi de suite, jusqu'à satisfaction du critère d'arrêt. (Il est évident qu'on ne peut pas calculer le coût de la méthode).

<u>La méthode de Gauss-Seidel revient au processus itératif suivant :</u>

1ère étape :

$$\begin{matrix} x_1^{(1)} = f\left(x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\right) \equiv Jacobi \\ x_2^{(1)} = g\left(x_1^{(1)}, x_3^{(0)}\right) \\ x_3^{(1)} = h\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right) \end{matrix} \rightarrow X^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix}$$

2ième étape :

$$\begin{matrix} x_1^{(2)} = f\left(x_2^{(1)}, x_3^{(1)}\right) \\ x_2^{(2)} = g\left(x_1^{(2)}, x_3^{(1)}\right) \\ x_3^{(2)} = h\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right) \end{matrix} \rightarrow X^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix}$$

(C'est à dire toutes les composantes calculées $(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})$ sont utilisées pour calculer x_i), et ainsi de suite, jusqu'à satisfaction du critère d'arrêt.

5. Généralisation :

Soit AX = b un système linéaire d'ordre n où $a_{ii} \neq 0, i = 1,2, \dots, n$. Les équations (4), (5) et (6) précédentes se généralisent comme suit :

$$x_i = \frac{\left(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} x_i\right)}{a_{ii}}, \quad \forall i = 1,2, \dots, n.$$

<u>Etapes principales de la méthode de Jacobi :</u>

1. Etant données A, b, $X^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\right)^t$, ϵ (la précision) et/ou $KMax$ (le nombre maximal d'itérations).

2. $x_i^{(k+1)} = \frac{\left(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} x_i^{(k)}\right)}{a_{ii}}$, $\forall i = 1,2, \dots, n$.

   A répéter pour $k = 0, \dots, KMax$.

   Si :

$$\frac{\left\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\right\|}{\left\|X^{(k+1)}\right\|} < \epsilon$$

Arrêter les itérations, et $X^{(k+1)}$ est une solution approchée de X solution du système donné avec une précision relative ϵ.

<u>Etapes principales de la méthode de Gauss-Seidel :</u>

1. Etant données A, b, $X^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\right)^t$, ϵ (la précision) et/ou $KMax$ (le nombre maximal d'itérations).

2. $x_i^{(k+1)} = \frac{\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right)}{a_{ii}}$, $\forall i = 1,2, \dots, n$.

   A répéter pour $k = 0, \dots, KMax$.

   Si :

$$\frac{\left\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\right\|}{\left\|X^{(k+1)}\right\|} < \epsilon$$

Arrêter les itérations, et $X^{(k+1)}$ est une solution approchée de X solution du système donné avec une précision relative ϵ.

Remarque 03 :

1. S'il existe $i_0 \in [1,n]$tel que $a_{i_0 i_0} = 0$, on procède à une permutation de ligne sur A (et sur b).
2. En général, la convergence de l'une de ces méthodes n'implique pas la convergence de l'autre.
3. Plus que $\rho(\mathrm{B}) \ll 1$, plus que la convergence du processus itératif
$$\begin{cases} X^{(0)} \in \mathbb{R}^n \; donné \\ X^{(k+1)} = B\, X^{(k)} + C \end{cases}$$
vers la solution exacte du système $AX = b$ est plus rapide.

Exemple 02:

Résoudre par la méthode de Jacobi en utilisant 3 itérations et un vecteur initial $X^{(0)} = (0,0,0)^t$ le système suivant :

$$\begin{cases} -1\, x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 2 \\ 3\, x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

Le système s'écrira en forme réduite :

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + 3x_3 - 1 \\ x_2 = 1 - \dfrac{1}{2}\; x_1 \\ x_3 = 3\, x_1 + x_2 - 1 \end{cases}$$

1ère itération : $X^{(0)} = (0,0,0)^t$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = x_2^{(0)} + 3x_3^{(0)} - 1 \\ x_2^{(1)} = 1 - \frac{1}{2}\; x_1^{(0)} \\ x_3^{(1)} = 3\, x_1^{(0)} + x_2^{(0)} - 1 \end{cases} \quad \text{cela donne} \quad \begin{cases} x_1^{(1)} = -1 \\ x_2^{(1)} = 1 \\ x_3^{(1)} = -1 \end{cases}$$

2ième itération : $X^{(1)} = (-1,1,-1)^t$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = x_2^{(1)} + 3x_3^{(1)} - 1 \\ x_2^{(2)} = 1 - \frac{1}{2}\; x_1^{(1)} \\ x_3^{(2)} = 3\, x_1^{(1)} + x_2^{(1)} - 1 \end{cases} \quad \text{cela donne} \quad \begin{cases} x_1^{(2)} = -3 \\ x_2^{(2)} = \frac{3}{2} \\ x_3^{(3)} = -3 \end{cases}$$

3^ième^ itération : $X^{(2)} = (-3,\ \frac{3}{2}, -3)^t$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = x_2^{(2)} + 3x_3^{(2)} - 1 \\ x_2^{(3)} = 1 - \frac{1}{2}\ x_1^{(2)} \\ x_3^{(3)} = 3\ x_1^{(2)} + x_2^{(2)} - 1 \end{cases} \qquad \text{cela donne} \qquad \begin{cases} x_1^{(3)} = -\frac{17}{2} \\ x_2^{(3)} = \frac{5}{2} \\ x_3^{(3)} = -\frac{17}{2} \end{cases}$$

Exemple 03:

Résoudre par la méthode de Gauss Seidel en utilisant 2 itérations et un vecteur initial $X^{(0)} = (0,0,0)^t$ le système suivant :

$$\begin{cases} -1\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 2 \\ 3\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

1^ère^ itération : $X^{(0)} = (0,0,0)^t$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = x_2^{(0)} + 3x_3^{(0)} - 1 \\ x_2^{(1)} = 1 - \frac{1}{2}\ x_1^{(1)} \\ x_3^{(1)} = 3\ x_1^{(1)} + x_2^{(1)} - 1 \end{cases} \qquad \text{cela donne} \qquad \begin{cases} x_1^{(1)} = -1 \\ x_2^{(1)} = \frac{3}{2} \\ x_3^{(1)} = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

2^ième^ itération : $X^{(1)} = (-1, \frac{3}{2}, -\frac{5}{2})^t$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = x_2^{(1)} + 3x_3^{(1)} - 1 \\ x_2^{(2)} = 1 - \frac{1}{2}\ x_1^{(2)} \\ x_3^{(2)} = 3\ x_1^{(2)} + x_2^{(2)} - 1 \end{cases} \qquad \text{cela donne} \qquad \begin{cases} x_1^{(2)} = -7 \\ x_2^{(2)} = \frac{9}{2} \\ x_3^{(3)} = -\frac{35}{2} \end{cases}$$