Institut Hygiène et Sécurité Batna 02	Année Universitaire 21/22
Département des Conditions de travail	Module: MQHI UM11
Partie I (suite): Principales lois de Probabilité Appliquée à la QSE	OUnissi. A

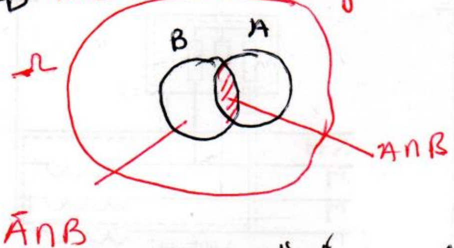
Probabilité Conditionnelle

Soit Ω un ensemble fini et P une loi de probabilité sur l'univers Ω liés à une expérience aléatoire. Soit A et B deux évènements de Ω tel que: $P(B) \neq 0$.

On définit la probabilité tel que: {A soit réalisé que B est réalisé} de la manière suivante: $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ où

- $P_B(A)$ se lit " Prob - B de A
- $P_B(A)$ se notait anciennement $P(A|B)$ et se lit " Prob de A sachant B" $\Rightarrow$ Théorème de Bays.

$$\begin{cases} P(\Omega) = 1 \\ P(\emptyset) = 0 \end{cases}$$



- Evenement contraire "$\bar{A}$" est réalisé sachant que B est réalisé"
- $P_B(\bar{A}) + P_B(A) = 1$ ou encore $P_B(\bar{A}) = 1 - P_B(A)$
- Si A et C sont deux évenements quelconques on peut écrire la formule:

$$P_B(A \cup C) = P_B(A) + P_B(C) - P_B(A \cap C)$$

- Si A et C deux evenements incompatibles on a:

$$P_B(A \cup C) = P_B(A) + P_B(C)$$

- Pour tous les évenements A et B de Ω tel que $P(B) \neq 0$, on obtient la formule de probabilité composés : $P(A \cap B) = P_B(A) \cdot P(B)$

Exemple: La Fiabilité d'un système de détection

Un système de détection répond par une alerte à la détection d'une panne intervenant sur une machine donnée. Soient A l'evenement «l'alerte est donnée» et B l'evenement «le système est en panne » Verifiant les probabilités conditionnelles suivantes $P(A|B) = 0{,}99$ et $P(A|\bar{B}) = 0{,}002$. Le Probleme qui se pose le service de sécurité est le suivant : si l'alerte est donnée, quelle est la probabilité pour qu'elle corresponde à une panne, sachant qu'une panne survient avec une probabilité = à 0,01 ? Il s'agit de calculer $P(B/A)$

Variable Aleatoire

On appelle variable aléatoire X une fonction qui associée à tous resultats (évenement élémentaire) un nombre réel.

Exemple:

Soit le jeu de dés suivant : quand on fait 6, on gagne 100 DA, quand on fait 1, on gagne 50 DA, et de 2 à 5, on perd 40 DA.

calculer la probabilité de l'évenement

$X(\{6\}) = 100$

$X(\{1\}) = 40$

$X(\{2\}) = X(\{3\}) = X(\{4\}) = X(\{5\}) = -40$

$A = "X" = -40$ $\quad P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$A = \{2, 3, 4, 5\}$

Principales loi de Probabilités

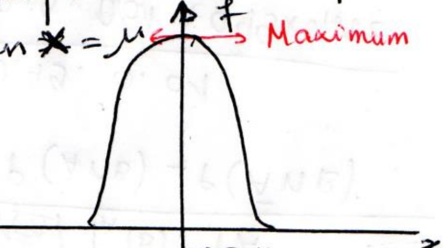
- La loi Normale:

- Si μ et σ sont 2 nombres telles que σ est positif, on dit que la variable aléatoire X suit la loi normale noté $N(\mu; \sigma)$ correspond une unique courbe en cloche représentative de la fonction f :

$$X \longrightarrow \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

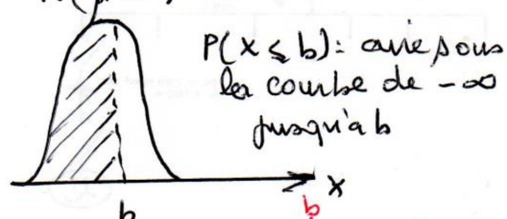
ou $X \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$

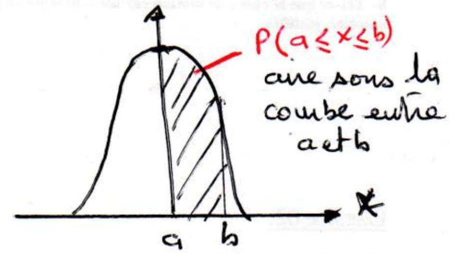
cette Courbe admit pour axe symetrique la droite d'equation $X = \mu$, elle admit un maximum en $X = \mu$ $\rightarrow$ Maximum



La variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne μ et d'ecart type σ, on note que $X \rightsquigarrow N(\mu . \sigma)$ signifie que l'ensemble des valeurs possibles de X est l'ensemble de tous les nombres réels $X \in]-\infty, +\infty[$.

$\forall$ les deux nombres a et b telque $(a \leq b)$, la probabilité de X soit compris entre a et b égale à l'aire sous la courbe en cloche, c-à-d $N(\mu . \sigma)$ entre a et b.





$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

La loi $N(\mu . \sigma) = N(0,1)$ de moyenne $\mu = 0$ et l'écart-type $\sigma = 1$ appellée loi normale centré réduite.

Esperance et Variance de la loi Normale

Espérance mathématique d'une variable aléatoire

L'esperance mathématique est l'equivalent en probabilité de la moyenne pondérée par les fréquences en statistiques. C'est la valeur moyenne en prendrait cette variable aléatoire sur un très grand nombre d'expériences aléatoires identiques et indep-endantes

$$E(X) = X_1 . P(X = x_1) + X_2 . P(X = X_2) + \dots + X_n (X = X_n)$$
$$= \sum X_i \, P(X = X_i)$$

Variance et Ecart type d'une variable aléatoire

Ils représentent la dispersion des valeurs que peut prendre la variable aleatoire autour de son espérance. L'avantage de l'ecart type et d'être exprimé dans la même unité de que la variable .

$$V(x) = E(x^2) - E^2(x) = x_1^2 P(x=x_1) + x_2^2 P(X=x_2) + \dots + x_n^2 P(x=x_n)$$
$$- E^2(x)$$
$$= \sum (x_i - E(x))^2 . P(X=x_i)$$

On appelle l'écart quadratique moyen ou écart type $\sigma(x) = V(x)$

On a aussi $V(x) = E((X - E(x))^2)$

Avec $E(x^2) = \sum x_i^2 . P(X = x_i)$

Calcul de $E(x)$ et $V(x)$ pour la loi Normale

$E(x) = \mu$? $V(x) = \sigma^2$?

Preuve:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

En faisant un changement de variable ci-dessous, on obtient:

$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ et $dZ = \frac{1}{\sigma} dx$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\sigma Z + \mu)}{\sigma . \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Z^2}{2}} dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma \frac{Z}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Z^2}{2}} dZ}_{I} + \mu \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Z^2}{2}} dZ}_{II}$$

le terme I est nul car c'est l'intégrale d'une fonction impaire et le terme II vaut μ car $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Z^2}{2}} dZ = 1$ $\Rightarrow E(X) = \mu$.

Avec le même changement de variable,

$$V(x) = E\left[(x-\mu)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma . \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$V(x) = \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Z^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Z^2}{2}} dx = \sigma^2 . H$$

L'intégrale H se calcule par partie, en choisissant

$U = \frac{Z}{\sqrt{2\pi}}$ $dU = \frac{dZ}{\sqrt{2\pi}}$

$dv = Z e^{-\frac{Z^2}{2}} dZ$, $v = -e^{-\frac{Z^2}{2}}$

$$H = \left[-\frac{z}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0 + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz}_{1} = 1$$

$\Rightarrow V(x) \cdot \sigma^2 \cdot 1 = \sigma^2$

Si X suit la loi Normale $N(\mu, \sigma^2)$, la variable $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi Normale centrée réduite $N(0,1)$ de densité $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$

soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires normales indépendantes de paramètres respectifs (μ_1, σ_1), (μ_2, σ_2), alors leurs somme $X_1 + X_2$ est une variable aléatoire normale de paramètres $(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$.

Loi bionomiale de paramètres n et P

Conditions

Epreuve de Bernoulli

Experience aléatoire qui admet exactement deux issues : succes ou échec

On appelle :

p : La probabilité de succes

q = 1 - p : La probabilité d'echec

Une expérience aléatoire qui est la répétition de n epreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. On définit alors la variable aléatoire X representant le nombre de succes par :

$$P[X = k] = C_k^n p^k (1-p)^{n-k}, \quad C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$= C_k^n p^k q^{n-k}$$

$0 \leq k \leq n$ et $0 \leq p \leq 1$

C_k^n : nombre de combinaisons k realisations de l'evenement A pour n expérience

k : nombre de réalisation de l'evenement A au cours de n expériences

On dit que la variable aléatoire X suit une loi bionomiale $\beta(n, p)$

La fonction de défaillance F de la variable aleatoire X distribuée selon la loi bionomiale est donnée par :

$$F(x) = P[X \leq n] = \sum_{i}^{k} C_n^i \, p^i (1-p)^{n-i}$$

- Espérance ou moyen mathématique $E(X) = n.p$
- Variance : $V(X) = n.p(1-p) = n.p.q$
- Ecart type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{n.p.q}$

Exemple :

On lance 4 dés, soit X la variable aléatoire qui compte le nombre d'apparition de chiffre 3.

1- Donne la loi de X
2- calculer E(x) et V(x)
3- Quelle est la probabilité d'avoir obtenu au moins 2 fois le nombre 3

Solution

L'experience consiste à répéter 4 fois d'une manière indépendante une epreuve de Bernoulli qui donne deux resultats A et $\bar{A}$ avec A : le dé affiche "3". $P[A] = 1/6$

$X \rightsquigarrow \beta(n.p)$ avec $n = 4$ et $p = 1/6$ $\quad 0 \leq K \leq 4$

Ainsi $P[X=K] = C_K^n \, p^K q^{n-K} = C_6^4 (1/6)(5/6)^0$ $\quad | \; q = 1-p = 1-\frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

2- $X \rightsquigarrow \beta(n.p) \Rightarrow$ Donc $E(x) = n.p = 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

$V(x) = n.p \times q = 4 \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{9}$

$= n.p.q = 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{9}$

3 on nous demande

$P[X \geq 2] = 1 - P[X < 2]$

$= 1 - P[X=0] - P[X=1]$

$P[X=0] = C_4^0 \, p^0 q^4 =$

$P[X=1] = C_4^1 \, p^1 \cdot q^3 =$

Loi de poisson:

On dit que X une loi de poisson (λ), on écrit :

$$X \sim P(\lambda)$$

ssi $P[X=k] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ $\quad k \in \mathbb{N}$

$E(x) = V(x) = \lambda \quad , \sigma(x) = \sqrt{x}$

Exemple: Si le nombre X de desintégration d'une substance radioactive durant un intervalle de temps de 7,5 seconde suit une loi de poisson de parametre 3,87.

1- Quel est le nombre moyen de désintégration durant un intervalles de temps de 7,5 seconde?

2. calculer l'ecart type Correspondant

2 - Determiner la probabilité qu'il n'y ait aucune désintegration durant un intervalle de temps de 7,5 seconde.

3. Quelle est la probabilité qu'il y ait entre 3 et 5 désintegrations durant 7,5 s.

Solution $\lambda = 3,87$ $\quad t = 7,5 s$

$E(x) = \lambda = 3,87$

Le nombre moyen de desintegrations est l'espérance de X $E(x)$,

puisque X suit la loi de poisson de paramètre $\lambda = 3,87$

On a $E(x) = \lambda = 3,87$ et donc, il y a en moyenne 3,87 désintegra-tion durant chaque periode de 7,5 s.

$\sigma(x) = \sqrt{\lambda} = \sqrt{3,87} = 1,97$

2. $P[X=0] = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = e^{-3,87} = 0,0209$

Il y a 2,09 % de chances qu'il y ait zéro désintégrations durant 7,5 s.

3. 3 et 5 desintegrations durant 7,5 s.

$$P[3 \leq X \leq 5] = P[X=3] + P[X=4] + P[X=5]$$

$$P[X=k] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$P[X=3] = e^{-3,87} \frac{3,87^3}{3!} = 0,0209 \times \frac{3,87^3}{6} = 0,2018$$

$$P[X=4] = e^{-3,87} \frac{3,87^4}{4!} = 0,0209 \times \frac{3,87^4}{24} = 0,195$$

$$P[X=5] = e^{-3,87} \frac{3,87^5}{5!} = 0,0209 \times \frac{3,87^5}{\underbrace{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}_{120}} = 0,151$$

$$P[3 \leq X \leq 5] = P[X=3] + P[X=4] + P[X=5] \simeq 0,5473$$

c.a.d il y a 54,73 % de chances qu'il ait entre 3 et 5 desintegra-tions durant une période de 7,5 s.

<u>N.B</u>: Approximation de la loi bionomiale par la loi de poisson lorsque n est grand et p petit", on peut remplacer la loi bionomiale $\beta(n;p)$ par la loi de Poisson de parametre $\lambda = n.p$.
Dans certaines conditions, elle peut également être définie comme limite d'une loi bionomiale (Notamment lorsque $n \geq 50$ et $n.p \leq 5$).

<u>Exemple</u>: La probabilité pour une ampoule électrique «grille» à son premier allumage est de 0,01. Sur un groupe de 100 Ampoules, quelle est la probabilité d'observer 0 ampoule qui grille? 1? plus de 2?

<u>solution</u>

Pour une ampoule, il s'agit d'une loi de Bernoulli, où le succès est assimilé au fait qu'une ampoule grille avec la probabilité

$p = 0{,}01.$

Le groupe de 100 ampoules suit une loi binomiale $\beta(100, 0{,}01)$ puisque $n = 100 \geq 50$ et $n.p = 1 \leq 5$, on peut raisonnablement approcher cette loi par une loi de Poisson de parametre $\lambda = 1$. Par suite,

$$P[X=0] = e^{-1}\frac{1^0}{0!} \simeq 0{,}3679$$

$$P[X=1] = e^{-1}\frac{1^1}{1!} \simeq 0{,}3679$$

$$P[X>2] = 1 - P[X \leq 2] = 1 - P[X=0] - P[X=1] - P[X=2]$$

$$= 1 - 2 \times 0{,}3679 - \ldots \simeq 0{,}0803$$

$$P[X=2] = e^{-2}\frac{1^2}{2!} \simeq \frac{e^{-2}}{2} = \ldots$$

Remarquons tout de même qu'il y a 36% de chances pour qu'aucune des 100 Ampoules ne grille à la première utilisation

* Solution de Exemple dans la page 1 (Probabilite Conditionnelle)

$P(B|A) = ?$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A|B).P(B)}{P(A|B).P(B) + P(A|\bar{B}).P(\bar{B})}$$

$$= \frac{0{,}99 \times 0{,}01}{0{,}01 \times 0{,}99 + 0{,}99 \times 0{,}002} \simeq 0{,}33$$