Introduction aux transferts thermiques

1.1 Les différents modes de transferts

Lorsque deux systèmes sont à des températures différentes, le système le plus chaud cède de la chaleur au plus froid. Il y a échange thermique ou encore transfert thermique entre ces deux systèmes. Cette situation se rencontre dans de nombreuses situations industrielles (moteurs thermiques ou même électriques, centrales électriques au fuel au gaz, etc..., électronique) ou domestique (chauffage de l'habitat). Un transfert d'énergie donne lieu à un flux de chaleur qui correspond à un déplacement de l'énergie du plus chaud vers le plus froid. Comme on le verra par la suite, le flux de chaleur dont la densité locale est notée $\vec{\varphi}$ est une grandeur vectorielle, ce qui signifie qu'un flux de chaleur est caractérisé non seulement par son intensité mais aussi par sa direction. Il est défini en chaque point de l'espace et a l'unité d'une densité surfacique de puissance (W/m^2). Il existe trois modes essentiels de transferts de chaleur: la conduction, le rayonnement et la convection.

1.1.1 La conduction

On sait que la température est une fonction croissante de l'agitation moléculaire dans un corps, qu'il soit solide, liquide ou gazeux. Considérons pour l'instant un corps solide au sein duquel la température varie. L'agitation moléculaire élevée de la zone chaude communiquera de l'énergie cinétique aux zones plus froides par un phénomène appelé conduction de la chaleur. La conduction est un phénomène de diffusion qui permet donc à la chaleur de se propager à l'intérieur d'un corps solide. Il en est de même pour un liquide ou un gaz mais on verra par la suite que pour eux, la convection est un autre mode de transfert de chaleur possible. Notons enfin que la conduction de la chaleur n'est pas possible dans le vide puisqu'il n'y a pas de support moléculaire pour cela.

1.1.2 Le rayonnement

La chaleur du soleil frappe pourtant notre planète alors qu'il n'y a aucun support solide, liquide ou gazeux au delà de l'atmosphère terrestre. Ceci signifie donc que l'énergie thermique peut tout de même traverser le vide. Ce mode de transfert s'appelle le rayonnement. Il correspond à un flux d'ondes électromagnétiques émises par tout corps, quelle que soit sa température. Comme on l'imagine, le rayonnement électromagnétique est d'autant plus élevé que sa température est grande. Comme pour la conduction, ce sont les interactions entre atomes et molécules qui sont à l'origine de ce rayonnement. Elles peuvent le générer , ce qui diminue leur énergie, ou encore l'absorber, ce qui l'augmente. De par sa nature, le rayonnement n'intervient que dans les milieux transparents (gaz, verre, vide) ou semi-opaque (gaz + fumées de CO2, gaz + vapeur d'eau).

1.1.3 La convection

Un débit ou une circulation de liquide ou de gaz peut transporter avec lui une certaine quantité d'énergie thermique. Ce transport de chaleur porte le nom de CONVECTION thermique. Ce transport de l'énergie par un écoulement est analogue au transport d'autres quantités scalaires (non vectorielles): transport d'une concentration de sel par de l'eau, transport de l'humidité par l'air, ... On retiendra donc que dans la convection, la chaleur se sert du fluide comme véhicule pour se déplacer. Sans entrer dans les détails, notons qu'il existe deux types de transferts convectifs:

- La convection forcée dans laquelle l'écoulement du fluide est forcé par un dispositif mécanique quelconque (pompe ou gravité pour un liquide, ventilateur pour de l'air).
- La convection naturelle: lorsqu'il existe une différence de température entre deux points d'un fluide, le fluide chaud, qui aura une masse volumique plus faible que le fluide froid aura tendance à monter sous l'effet de la poussée d'Archimède.

  Il y aura ainsi circulation naturelle du fluide sous l'effet de la chaleur qui, par ailleurs, sera transportée avec lui: on parle de convection naturelle. Si l'on prend l'exemple d'un chauffage domestique, l'eau chaude qui arrive dans les radiateurs circule par convection forcée, entretenue par le circulateur (petite pompe située dans la chaufferie) tandis que l'air des pièces de la maison circule par convection naturelle depuis le radiateur autour duquel il s'échauffe jusqu'au plafond vers lequel il s'élève avant de redescendre pour former un circuit fermé.

En convection on caractérise le flux de chaleur Φ qui est extrait par le fluide de température T_0 d'une paroi de surface S à la température T_P par :

$$\Phi = h\ S\ (T_P - T_0)$$

où Φ est en $Watt$, S en m^2, T en $Kelvin$ et où h désigne le coefficient d'échange entre la paroi et le fluide (en $W.m^{-2}.K^{-1}$).

1.2 Combinaison des différents modes de transferts

Dans beaucoup de situations, il y a coexistence de 2 ou même 3 des modes de transferts thermiques décrits précédemment. Fort heureusement, il est fréquent qu'un mode soit prépondérant et simplifie l'analyse. Avant de finir ce paragraphe, signalons que certains échanges de chaleur s'accompagnent d'un changement d'état (vaporisation, condensation, fusion, congélation). Ces phénomènes se comportent alors comme une source (ex. de la condensation) ou un puits de chaleur (ex. de la vaporisation).
Le dessin de la figure 1.1 qui représente une fenêtre à double vitrage synthétise l'ensemble des exemples cités.

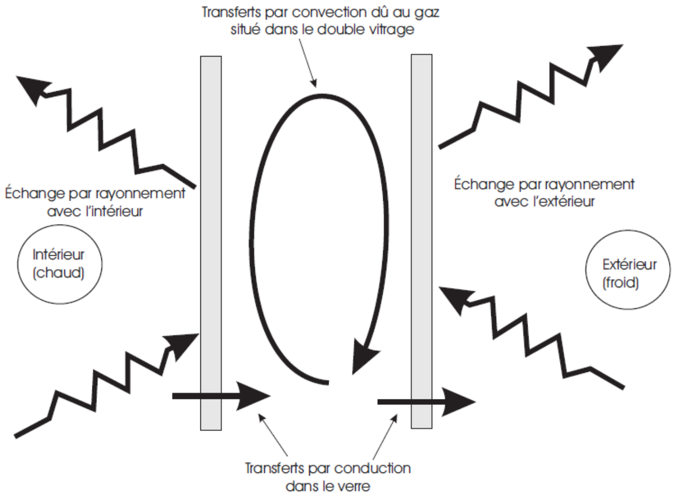


Figure 1.1: Exemple illustrant les différents types de transferts de chaleur.

CONDUCTION

INTRODUCTION

La conduction est le mode de transfert de chaleur existant dans un milieu donné sans qu'il y ait déplacement apparent de matière. C'est ce qui se passe en particulier dans un milieu solide homogène (métal, paroi…), mais qui a lieu aussi dans les fluides immobiles.

La conduction ne peut exister que s'il existe des écarts de températures c'est à dire si le gradient de température n'est pas nul. Dans le cas contraire le milieu est en équilibre thermique et aucun transfert de chaleur ne peut se produire. Pour que ce gradient de température existe, il faut une action externe au système pour pouvoir maintenir des conditions de températures données aux limites du système.

Afin de simplifier les modèles et leurs résolutions, l'analyse est souvent faite en régime permanent des températures c'est à dire que la température en tout point M (x, y, z) est stable : c'est le *régime permanent*.

Dans cette partie du cours relatif à la conduction nous proposons dans le chapitre 1 de rappeler certaines définitions et de définir la loi de Fourier et l'équation de la chaleur.

Le chapitre 2 est consacré au régime permanent appliqué à différentes géométries (mur, cylindre, sphère).

CHAPITRE 1

GENERALITES ET EQUATIONS GENERALES

1.1 Généralités

La relation fondamentale de la transmission de la chaleur par conduction a été proposée par FOURIER en 1822. Pour bien comprendre cette loi, il faut au préalable définir un certain nombre de grandeurs physiques.

1.2 Quelques définitions

1.2.1 Flux de chaleur à travers une surface

C'est la quantité de chaleur qui traverse la surface considérée pendant l'unité de temps. Le symbole utilisé est la lettre ϕ. L'unité dans le système international est le Watt.

$$d\phi = d^2Q / dt$$

1.2.2. Densité de flux de chaleur

C'est la quantité de chaleur qui traverse l'unité de surface pendant l'unité de temps. C'est donc le flux de chaleur par unité de surface (ou densité de flux). On le notera φ . L'unité dans le système international est le Watt / m².

$$\varphi = d\phi / dS$$

1.2.3. Surfaces isothermes

Considérons dans un corps homogène un champ de température T défini en chaque point et à chaque instant par la fonction $T = f(x, y, z, t)$. x, y, z sont les variables spatiales, t est le temps. Dans tout le corps, on peut définir à l'instant t des surfaces qui constituent les lieux des points ayant la même température. Ce sont les surfaces isothermes.

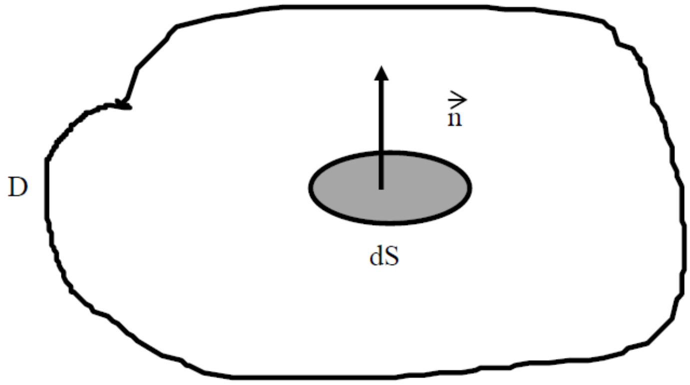
Deux surfaces isothermes ne peuvent se couper car on aurait alors deux températures différentes en un même point ce qui est physiquement impossible.

1.2.4 Gradient de température

Le gradient de température est le vecteur qui caractérise en un point donné la variation de la fonction température. Ce vecteur est en tout point normal à la surface isotherme passant par ce point.

1.3 Loi de FOURIER

Considérons un milieu solide D **dans** lequel une surface élémentaire dS est orientée par sa normale unitaire $\vec{n}$.



La quantité de chaleur d^2 Q qui traverse la surface dS pendant l'intervalle de temps dt dans le sens de la normale $\vec{n}$ est donnée par la loi de FOURIER :

$$d^2Q = -\lambda \, . \, \overrightarrow{grad\,T} \, . \, \vec{n} \, . dS \, . dt$$

ou : $\overrightarrow{\text{grad}}$ T est le gradient de température défini suivant les trois axes Ox, Oy et Oz par :

$$\overrightarrow{\text{grad T}} \begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial x} \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} \\ \dfrac{\partial T}{\partial z} \end{cases}$$

λ est un coefficient appelé conductivité thermique du matériau (en W/m.°C)

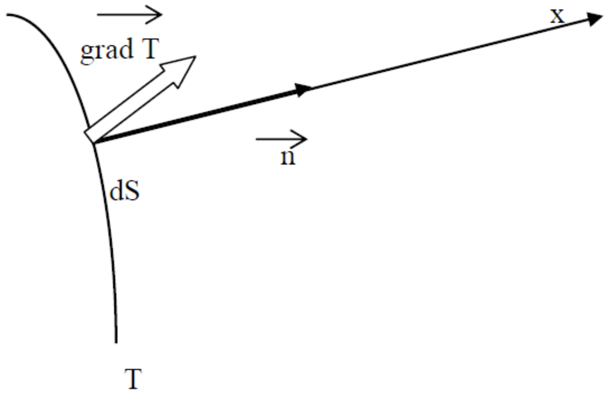
On a également :

$$d\Phi = \frac{d^2 Q}{dt} = -\lambda \, . \, \overrightarrow{grad\,T} \, . \, \vec{n} \, . dS \qquad \text{(flux de chaleur)}$$

$$\text{et : } d\varphi = \frac{d^2 Q}{dt . dS} = -\lambda \, . \, \overrightarrow{grad\,T} \, . \, \vec{n} \qquad \text{(densité de flux de chaleur)}$$

La présence du signe - dans le second membre des relations signifie que le flux de chaleur progresse dans le sens opposé au gradient de température c'est à dire des températures les plus élevées vers les températures les plus basses (ce qui est du bon sens physique)..

Si la surface dS est située sur une surface isotherme les vecteurs $\overrightarrow{grad\,T}$ et n sont colinéaires d'où



$$d^2Q = -\lambda \frac{dT}{dx}\, dS\, dt$$

ou $$d\Phi = -\lambda \frac{dT}{dx}\, dS \qquad \varphi = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

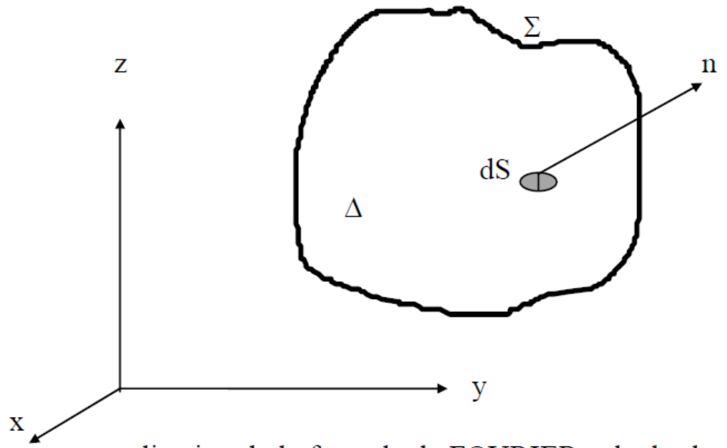
Substances	λ en W/ m°C
- Gaz à la pression atmosphérique	0,006 - 0,15
- Matériaux solides isolants (Laine de verre, polystyrène, liège, amiante...)	0,025 - 0,18
- Liquides non métalliques	0,075 -0,60
- Matériaux non métalliques (brique, pierre à bâtir, béton, bois..)	0,10 - 2,2
- Métaux liquides	7,5 - 67
- Alliages métalliques	12 - 100
- Métaux purs	45 - 365

1.4 EQUATION GENERALE DE LA CHALEUR

1.4.1 Etablissement de l'équation générale

Considérons un champ de température T (x, y, z, t) dans un volume Δ limité par une surface Σ d'un corps quelconque de masse volumique ρ , de chaleur massique à volume constant C_v et de conductivité thermique λ (figure 1-3).

En un point M de la surface Σ, considérons un élément de surface dS et n le vecteur unitaire de la normale en M orienté vers l'extérieur.



Nous allons par application de la formule de FOURIER calculer la quantité de chaleur $d^2 Q_1$ qui **pénètre** dans le volume Δ à travers dS pendant l'intervalle de temps dt, donc dans le sens opposé à la normale n. Le signe - disparaît donc de la formule:

$$d^2Q_1 = -\lambda . \overrightarrow{grad\, T} . \vec{n} . dS . dt$$

La quantité de chaleur totale qui pénètre dans le volume Δ à travers la surface Σ pendant dt est alors donné par :

$$Q_1 = \iint_{\Sigma} \lambda . \overrightarrow{grad\, T} . \vec{n} . dS . dt$$

Transformons cette intégrale de surface en une intégrale de volume à l'aide de l'expression:

$$\iiint_{\Delta} \overrightarrow{div} F . dV = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{F} . \vec{n} . dS$$

on obtient :

$$Q_1 = \iint_{\Sigma} \lambda . \overrightarrow{grad\, T} . \vec{n} . dS . dt = \iiint_{\Delta} div(\lambda . \overrightarrow{grad\, T})\ dV . dt$$

où dV est un élément de volume pris à l'intérieur de Δ .

Calculons maintenant la quantité de chaleur Q_2 créée dans le volume Δ. En effet dans le cas général d'un corps quelconque il peut y avoir création de chaleur dans la masse. Soit

P (x,y,z,t) le flux de chaleur créé par unité de volume. Q_2 est alors donnée par la formule :

$$Q_2 = \iiint_\Delta P\,(x, y, z, t)\, dV\, dt$$

Faisons maintenant le bilan énergétique pour le volume Δ, ce qui nous permet d'écrire :

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

où Q_3 représentera la quantité de chaleur nécessaire à la variation de température du volume Δ . Si $\frac{\partial T}{\partial t}$ dt représente la variation de température du volume dV pendant dt, l'équation de la calorimétrie permet d'écrire :

$$d^2 Q_3 = \rho\, C_v \frac{\partial T}{\partial t}\, dt\, dV$$

$$\text{et} \quad Q_3 = \iiint_\Delta \rho\, C_v \frac{\partial T}{\partial t}\, dV\, dt$$

D'ou l'équation de bilan:

$$\iiint_\Delta \operatorname{div}(\lambda.\overrightarrow{\operatorname{grad} T}).dV.\ dt + \iiint_\Delta P\,(x, y, z, t)\, dV\, dt = \iiint_\Delta \rho\, C_v \frac{\partial T}{\partial t}\, dV\, dt$$

ou encore:

$$\operatorname{div}(\lambda.\overrightarrow{\operatorname{grad} T}) + P\,(x, y, z, t) = \rho\, C_v \frac{\partial T}{\partial t}$$

et en développant $\operatorname{div}(\lambda.\overrightarrow{\operatorname{grad} T})$ il vient :

$$\lambda.\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad} T}) + \overrightarrow{\operatorname{grad} \lambda}\ .\ \overrightarrow{\operatorname{grad} T} + P = \rho.C_v.\frac{\delta T}{\delta t}$$

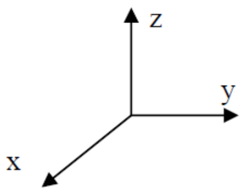
$$\lambda\,.\,\Delta T + \overrightarrow{\operatorname{grad} \lambda}\ .\ \overrightarrow{\operatorname{grad} T} + P = \rho.C_v.\frac{\delta T}{\delta t}$$

Formule dans laquelle Δ T est le Laplacien de la température

$$\Delta T = \frac{\delta^2 T}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 T}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 T}{\delta z^2} \qquad \text{en coordonnées cartésiennes.}$$

L'expression ainsi obtenue représente l'équation de la chaleur régissant les transferts par conduction en régime variable des températures avec création de chaleur dans la masse et une conductivité λ fonction des variables spatiales et éventuellement du temps.

En coordonnées cartésiennes (x, y, z)

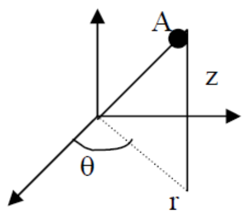


$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

En coordonnées cylindriques (r, z,θ)

Dans le cas général
$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}.\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}.\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Dans le cas d'une symétrie cylindrique T = f (r)

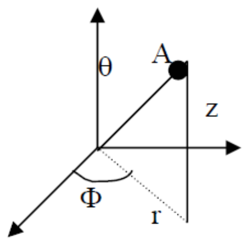


$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}.\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{r}.\frac{\partial\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)}{\partial r}$$

En coordonnées sphériques (r, θ, ϕ)

Dans le cas général
$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}.\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}.\frac{\partial\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}.\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}$$

Dans le cas d'une symétrie sphérique T = f (r)



$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}.\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{r}.\frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2}$$

Expression du Laplacien de la température dans différents repères

1.4.2 Etude de cas particuliers :

1.4.2.1 La conductivité ne dépend que de la température du point considéré

En calculant le produit scalaire $\overrightarrow{\text{grad}\,\lambda} \cdot \overrightarrow{\text{grad}\,T}$ l'équation de la chaleur peut se mettre sous la forme :

$$\lambda.\Delta T + \frac{\partial \lambda}{\partial T}\left[(\frac{\partial T}{\partial x})^2 + (\frac{\partial T}{\partial y})^2 + (\frac{\partial T}{\partial z})^2 \right] + P = \rho.C_v \frac{\partial T}{\partial t}$$

1.4.2.2 λ ne varie pas avec la température ou sa variation est négligeable

C'est le cas particulier important d'un matériau homogène et isotrope avec un coefficient λ pouvant être considéré comme constant.

L'expression précédente devient alors :

$$\lambda.\Delta T + P = \rho.C_v \frac{\partial T}{\partial t}$$

1.4.2.3 λ ne varie pas avec la température et il n'y a pas de dégagement de chaleur interne

On a :

$$\lambda.\Delta T = \rho.C_v \frac{\partial T}{\partial t}$$

Expression que l'on a l'habitude de mettre sous la forme :

$$\frac{\lambda}{\rho C_v}\Delta T = \frac{\partial T}{\partial t} \qquad avec\ \frac{\lambda}{\rho C_v} = a$$

Le coefficient **a** qui rassemble les caractéristiques thermophysiques du matériau dans lequel s'effectue le transfert est appelé la **diffusivité thermique**. Il s'exprime dans le système S.I. en m^2/s.

1.4.2.4 La température n'est plus fonction du temps.

C'est l'étude du **régime permanent** avec ou sans dégagement de chaleur. Si l'on suppose que la conductivité λ est une constante indépendante de la température, il vient :

- avec dégagement de chaleur interne: P # 0

$$\lambda\,\Delta T + P = 0$$

- sans dégagement de chaleur interne: P = 0

$$\Delta T = 0$$

Equation connue sous le nom d'**équation de LAPLACE.**

1.5 Conditions aux limites spatio-temporelles pour la résolution de l'équation de la chaleur

L'équation générale de la chaleur exprime une relation entre la fonction température T et les variables x, y, z et t. La solution mathématique de cette équation aux dérivées partielles, linéaire, du deuxième ordre admet en principe une infinité de solutions. Aussi, sa résolution nécessite la connaissance, d'une part de la condition initiale c'est à dire la répartition initiale des températures en tout point du milieu T (x, y, z, 0), d'autre part la loi de variation en fonction du temps de la température ou de sa dérivée normale sur la surface S. Ce sont **les Conditions aux limites spatio-temporelles**.

1.5.1 Condition initiale

C'est la répartition de température à l'instant t = 0 soit $T_o = f(x, y, z, 0)$. Généralement cette condition est connue.

1.5.2 Conditions aux limites

Sur les frontières d'un matériau différents types de conditions aux limites peuvent apparaître dans les problèmes couramment rencontrés en transfert de chaleur.

1.5.2.1 La température est imposée sur la surface S (problème de Dirichlet)

$$T_S = f(M_S, t)$$

1.5.2.2 La densité de flux est imposée en surface (problème de Neumann)

$$\varphi = -\lambda \left(\frac{dT}{dn}\right)_S = f(M_S, t)$$

où $\left(\frac{dT}{dn}\right)_S$ est la dérivée normale à la surface.

1.5.2.3 Le transfert est linéaire à la surface (problème mixte ou de Fourier)

On précisera ultérieurement (voir troisième partie de ce cours: Transferts de chaleur par convection) que le flux de chaleur échangé par convection entre une paroi solide à la température T_S et le fluide qui la baigne à la température T_g est donné par :

$$\varphi_c = h_c (T_S - T_g)$$

avec h_c coefficient d'échange superficiel par convection.

1.5.2.4 Le solide étudié est en contact avec un autre matériau

A l'interface S des deux milieux possédant des conductivités différentes λ_1 et λ_2 la conservation du flux s'écrit :

$$\lambda_1 \cdot \overrightarrow{\text{grad } T_1} = \lambda_2 \cdot \overrightarrow{\text{grad } T_2} \quad \text{sur S}$$

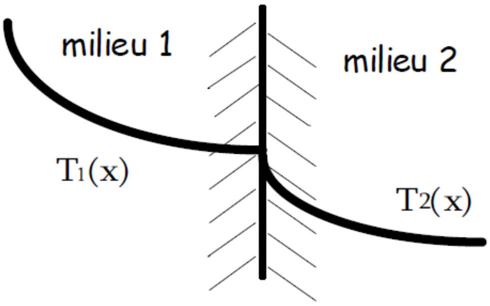
Une deuxième condition est obtenue, dans le cas d'un contact parfait. Il s'agit de l'égalité des températures sur S :

$$T_1 = T_2$$

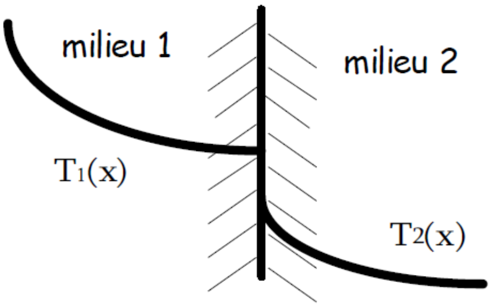
Dans la réalité cette condition n'est pas réalisée : il y a discontinuité de la température au contact des deux matériaux. La condition obtenue sur l'interface s'écrit alors :

$$T_1\ (S) - T_2\ (S) = R.\varphi$$

φ étant la densité de flux traversant l'interface. R représente la résistance thermique de contact qui sera précisée dans le chapitre suivant.



Contact parfait



Contact imparfait

1.5.2.5 Conclusions

Les conditions aux limites rencontrées dans les problèmes du thermique sont rappelées dans le tableau suivant:

- **Conditions de Dirichlet** : température imposée sur la surface

$$T_S = f\ (M_S, t)$$

- **Conditions de Neumann** : densité de flux imposée à la surface :

$$\varphi = -\lambda\ \left(\frac{dT}{dn}\right)_S = f\ (M_S, t)$$

- **Conditions de Fourier** : densité de flux fonction linéaire de l'écart de température surface-milieu baignant la surface (milieu fluide).

$$\varphi = -\lambda\ \left(\frac{dT}{dn}\right)_S = h\ (T_S - T_F)$$

- **contact entre deux matériaux**

$$\lambda_1\ \left(\frac{dT_1}{dn}\right)_S = \lambda_2\ \left(\frac{dT_2}{dn}\right)_S$$

$$T_1 = T_2 \quad \text{ou} \quad \left|T_1 - T_2\right| = R\ \lambda_1\ \left(\frac{dT_1}{dn}\right) = R\ \lambda_2\ \left(\frac{dT_2}{dn}\right)$$

CHAPITRE 2

TRANSMISSION DE LA CHALEUR EN REGIME PERMANENT

L'équation de la chaleur est sous sa forme la plus générale donnée par l'équation :

$$\lambda \ \Delta T + \overrightarrow{\text{grad}\,\lambda} \,.\, \overrightarrow{\text{grad}\,T} + P = \rho\, C_v \frac{\partial T}{\partial t}$$

En régime permanent (T indépendant de t) il vient :

$$\lambda \ \Delta T + \overrightarrow{\text{grad}\,\lambda} \,.\, \overrightarrow{\text{grad}\,T} + P = 0$$

Nous allons étudier un certain nombre de cas particuliers simples du fait de leur géométrie. Nous terminerons par une méthode plus générale de résolution de l'équation de LAPLACE.

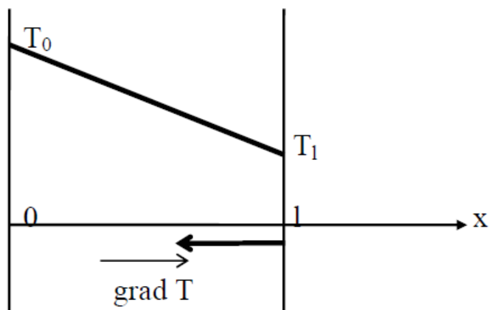
2.1 PROBLEME DU MUR EN CONDUCTION "MORTE"

(sans sources internes de chaleur P=0)

Considérons un matériau homogène et isotrope limité par deux surfaces planes parallèles de dimensions infinies.
L'équation de la chaleur s'écrit :

$$\lambda \ \Delta T + \overrightarrow{\text{grad}\,\lambda} \,.\, \overrightarrow{\text{grad}\,T} = 0$$

Conditions aux limites du problème: Les deux faces du mur sont maintenues à des températures fixes dans le temps (conditions de Dirichlet)



$x = 0 \qquad T = T_0$

$x = l \qquad T = T_1$

Remarques :

- La condition initiale ne joue ici aucun rôle puisque nous sommes en régime permanent.

- Le problème traité est un problème à une dimension. La température est uniquement fonction de la variable x.

Le Laplacien ΔT s'écrit alors $\Delta T = \dfrac{d^2 T}{dx^2}$

L'équation devient :

$$\lambda \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{d\lambda}{dx} \cdot \frac{dT}{dx} = 0$$

c'est-à-dire: $\dfrac{d}{dx}(\lambda \dfrac{dT}{dx}) = 0$

2.1.1 Cas où λ est constant

C'est le cas pratique le plus courant et cette approximation est valable lorsque les température T_0 et T_1 sont voisines :

2.1.1.1 Détermination du champ de température

L'équation se réduit à :

$$\frac{dT}{dx} = Cste$$

d'où : $T = A\,x + B$

A et B sont deux constantes que l'on calcule en fonction des conditions aux limites, d'où la solution :

$$T = \frac{T_l - T_0}{l}\,x + T_0$$

On obtient une **répartition linéaire des températures**. Les isothermes sont des plans parallèles aux faces du mur.

Remarque : On voit que la répartition de température est indépendante de la valeur du coefficient de conductivité λ, donc indépendante de la nature du matériau qu'il soit conducteur ou isolant.

2.1.1.2 Calcul de la densité de flux de chaleur

On applique la formule générale proposée par Fourier. Il vient :

$$\varphi = -\lambda \,.\, \overrightarrow{grad\,T} \,.\, \vec{n} = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

$$\varphi = \lambda \frac{T_0 - T_l}{l}$$

Remarque : cette formule montre que φ est indépendant de x. Cette propriété est la caractéristique d'un **système à densité de flux conservative**. La densité de flux qui traverse le plan isotherme correspondant à une valeur donnée de x est constante dans toute la traversée du mur.

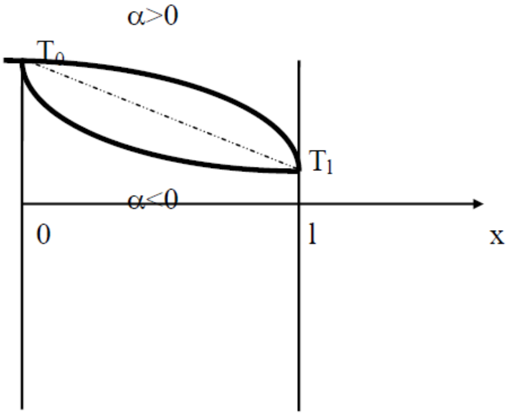
2.1.2 La conductivité du matériau varie avec la température

Pour de nombreux matériaux si le domaine de température n'est pas trop grand, on peut admettre une variation linéaire de λ avec la température.

$$\lambda = \lambda_0 (1 + \alpha T)$$

2.1.2.1 Détermination du champ de température

La résolution de l'équation de la chaleur donne comme solution une répartition des températures en fonction de x parabolique (figure 2-2)



$$T(x) + \frac{1}{2}\alpha T^2(x) = \frac{T_l - T_0}{l}(1 + \alpha\frac{T_l + T_0}{2})x + T_0 + \frac{1}{2}\alpha T^2{}_0 \qquad (2\text{-}9)$$

Suivant le signe de α la concavité est dirigée soit vers le haut, soit vers le bas.

2.1.2.2 Détermination de la densité de flux traversant le mur

A partir de la loi de Fourier, on obtient une densité de flux, indépendante de l'abscisse (flux conservatif), donnée par la relation :

$$\varphi = \frac{T_0 - T_l}{l} \quad \lambda_0 \; (1 + \alpha\frac{T_l + T_0}{2})$$

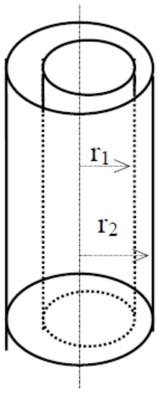
ou encore :

$$\varphi = - (\text{grad } T)_m \, . \, \lambda_m$$

où : $(\text{grad } T)_m$ est égal à $\frac{T_l - T_0}{l}$ c'est à dire le gradient moyen de température et λ_m à la valeur moyenne de la conductivité dans l'intervalle (T_0 , T_1).

2.2 PROBLEME DU CYLINDRE

C'est le problème du transfert de chaleur par conduction en régime permanent dans une géométrie cylindrique sans sources internes de chaleur (conduite cylindrique). Soit r_1 et r_2 les rayons intérieur et extérieur.



Conditions aux limites du problème (Conditions de Dirichlet)

$r = r_1$ $T = T_1$

$r = r_2$ $T = T_2$

Comme dans le paragraphe précédent nous laissons de coté pour l'instant les échanges de chaleur entre le fluide qui circule à l'intérieur du tube et la paroi interne. Nous ne tenons pas compte non plus des échanges extérieurs. Ces phénomènes font intervenir la convection et le rayonnement (conditions aux limites de Fourier). Nous cherchons simplement la répartition de la température dans le tube ($r_1 < r < r_2$) et l'expression du flux de chaleur par mètre de longueur du tube.

2.2.1 Détermination du champ de température

Par raison de symétrie les isothermes sont des cylindres coaxiaux, et la température n'est fonction que du rayon r. S'il n'y a pas de dégagement interne de chaleur (P = 0) et si λ est constant, l'équation de la chaleur (équation 2-1) s'écrit :

$$\Delta T = \frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} = 0$$
$$= \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dT}{dr})$$

La solution de cette équation différentielle est du type :

$$T = \alpha \ln r + \beta$$

α et β sont deux constantes calculées à l'aide des conditions aux limites du problème.

le champ de température est alors donné par l'expression :

$$T = \frac{T_1 - T_2}{\ln\frac{r_1}{r_2}}\ln r + \frac{T_2 \ln r_1 - T_1 \ln r_2}{\ln\frac{r_1}{r_2}}$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$T = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \ln \frac{r}{r_1}$$

Remarque : Comme dans le problème du mur la répartition de température est indépendante de la valeur du coefficient de conductivité λ lorsque celui-ci est constant.

2.2.2 Calcul du flux de chaleur par unité de longueur du tube

Dans le cas du mur en régime permanent le système était à densité de flux conservative. Maintenant **c'est le flux qui se conserve dans la traversée du système**. Donc nous le calculons pour une surface isotherme quelconque de rayon r et pour une longueur unitaire de tube. L'expression de Fourier donne :

$$\Phi = -\lambda\, 2\pi \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_1}{r_2}} = 2\pi\lambda \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

Comme nous l'avons fait dans le cas du mur nous pourrions calculer le flux dans l'hypothèse où λ est fonction de la température. On définirait alors un coefficient moyen λ_m par la formule :

$$\lambda_m = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \lambda \, dT$$

Φ serait donné par l'équation dans laquelle λ a été remplacé par λ_m

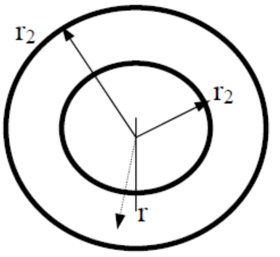
2.3 PROBLEME DE LA SPHERE

Considérons deux sphères concentriques de rayon r_1 et r_2 limitant un volume de matière sans sources internes de chaleur.

Les conditions aux limites du problème sont des conditions de Dirichlet:

$r = r_1$ $T = T_1$

$r = r_2$ $T = T_2$



L'équation de la chaleur s'écrit:

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dT}{dr} = 0$$

ou $\frac{1}{r}\frac{d^2(rT)}{dr^2} = 0$

ce qui donne après intégration:

$$\frac{d(rT)}{dr} = \alpha$$

d'où $$T = \frac{\beta}{r} + \alpha$$

les constantes β et α sont calculées avec les conditions aux limites . Il vient :

$$T = \frac{r_1 r_2 (T_1 - T_2)}{(r_2 - r_1)\, r} + \frac{T_2 r_2 - T_1 r_1}{r_2 - r_1}$$

où

$$T = T_1 + \frac{r_1 r_2 (T_1 - T_2)}{r_2 - r_1} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right]$$

Comme dans le problème du cylindre **le flux est conservatif** et nous le calculerons pour une isotherme quelconque. Il vient :

$$\Phi = -\lambda \left(\frac{dT}{dr}\right)_r 4\pi r^2 \qquad \text{avec} \qquad \frac{dT}{dr} = -\frac{\beta}{r^2}$$

d'où $$\Phi = \lambda\, 4\, \pi\, \beta = 4\, \pi\, \lambda \frac{r_1 r_2 (T_1 - T_2)}{r_2 - r_1}$$

2.4 SYNTHESE DES RESULTATS SIGNIFICATIFS (Mur, Cylindre et Sphère)

Cas de référence	Problème « mur »	Problème cylindrique	Problème sphérique
Equation de la chaleur $\Delta T = 0$	$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$	$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = 0$ $\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial\left(r \frac{\partial T}{\partial r}\right)}{\partial r} = 0$	$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = 0$ $\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2} = 0$
Solution générale	$T = ax + b$	$T = a.\ln r + b$	$T = a + \frac{b}{r}$

Solution générale de l'équation de la chaleur en régime permanent et conduction morte (a et b sont deux constantes d'intégration)

Cas de référence	Problème « mur »	Problème cylindrique	Problème sphérique
CL du 1er type	En $x = x_1 \rightarrow T = T_1$ En $x = x_2 \rightarrow T = T_2$	En $r = r_1 \rightarrow T = T_1$ En $r = r_2 \rightarrow T = T_2$	En $r = r_1 \rightarrow T = T_1$ En $r = r_2 \rightarrow T = T_2$
Calcul des constantes a et b	$a = \frac{T_1 - T_2}{x_1 - x_2}$ $b = \frac{T_2 x_1 - T_1 x_2}{x_1 - x_2}$	$a = \frac{T_1 - T_2}{\ln[r_1 / r_2]}$ $b = \frac{T_2 \ln r_1 - T_1 \ln r_2}{\ln[r_1 / r_2]}$	$a = \frac{T_1 r_1 - T_2 r_2}{r_1 - r_2}$ $b = -\frac{[T_1 - T_2] r_1 r_2}{r_1 - r_2}$

Constante d'intégration a et b pour des conditions aux limites de DIRICHLET (1er type)

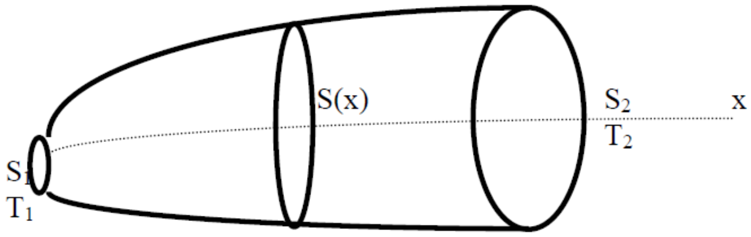
Cas de référence	Problème « mur »	Problème cylindrique	Problème sphérique
Champ de température (solution générale)	$T=ax+b$	$T=a.\ln r+b$	$T = a + \frac{b}{r}$
Isothermes	Plan parallèles aux faces du « mur »	Cylindres concentriques	Sphères concentriques
Lignes de flux	Perpendiculaires aux faces du « mur »	radiales	radiales
GradT	$\frac{\partial T}{\partial x} = a$	$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{a}{r}$	$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{b}{r^2}$
Densité de flux conductif φ(x ou r) $= -\lambda.[\vec{u}.\mathrm{grad}T]$ en $[W.m^{-2}]$	$\varphi = -\lambda.a=$ $\lambda.\frac{T_1 - T_2}{x_2 - x_1}$ indépendant de x	$\varphi = -\lambda.\frac{a}{r} =$ $\lambda.\frac{T_1 - T_2}{\ln[r_2 / r_1]}.\frac{1}{r}$	$\varphi = -\lambda.\frac{b}{r^2} =$ $\lambda.\frac{[T_1 - T_2] r_1 r_2}{r_2 - r_1}.\frac{1}{r^2}$
Flux conductif à travers une surface S en [W]	S = surface plane isotherme	S = cylindre isotherme de longueur L	S = sphère isotherme
	$\Phi = \lambda.\frac{T_1 - T_2}{x_2 - x_1}.S$ indépendant de x	$\Phi = 2\pi\lambda.\frac{T_1 - T_2}{\ln[r_2 / r_1]}.L$ indépendant de r	$\Phi = 4\pi\lambda.\frac{[T_1 - T_2] r_1 r_2}{r_2 - r_1}$ indépendant de r

Définition des isothermes et flux en régime permanent et conduction morte.

2.5 CONDUCTION A TRAVERS PLUSIEURS CORPS PLACES EN SERIE OU PARALLELE

Considérons un tube de flux dans un matériau homogène et isotrope à l'intérieur duquel, existe un gradient de température (figure 2-5). Puisque le flux est conservatif on a pour une surface S(x):

$$\Phi = -\lambda(x)S(x)(\frac{dT}{dx})_x$$



où $(\frac{dT}{dx})_x$ est la valeur du gradient de température au point considéré. Nous écrivons l'expression précédente sous la forme :

$$\frac{dx}{\lambda(x)\ S(x)} = -\frac{dT}{\phi}$$

En intégrant entre les limites précisées sur la figure précédente il vient :

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\lambda(x)\ S(x)} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi}$$

Par définition on appellera **résistance thermique** du tube de flux considéré la quantité :

$$R_T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\lambda(x)\ \ S(x)}$$

La **conductance thermique** est définie comme l'inverse de la résistance :

$$K_T = \frac{1}{R_T}$$

On obtient alors :

$$R_T = \frac{1}{K_T} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi}$$

Les résistances thermiques s'expriment dans le système d'unité S.I en °C / W. Comparons cette expression à la résistance électrique R_e que l'on définit en électricité à partir de la loi d'Ohm

$$R_e = V / I$$

Si l'on établit une correspondance entre, d'une part le flux de chaleur Φ et le courant électrique I, d'autre part entre la température T et la différence de potentiel V, les formules précédentes sont "analogues". Cette remarque constitue le point de départ des méthodes d'analogie électrique que nous développerons dans la suite de ce cours.

Pour des formes simples comme le mur de dimensions latérales infinies, le cylindre ou la sphère, le calcul de R_T conduit aux expressions déjà trouvées.

2.5.1 Résistance thermique du mur

$$\Phi = \lambda\, S \frac{\Delta\, T}{l}$$

ce qui nous donne alors :

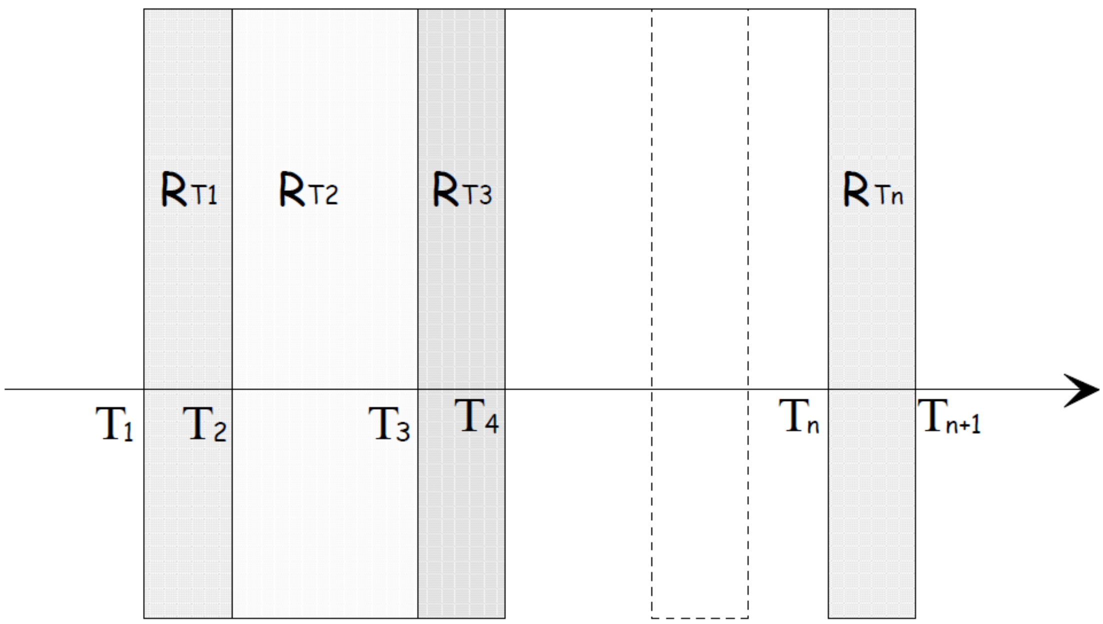
$$R_{T}\text{ , mur } = \frac{l}{\lambda\, S} = \rho_t \frac{l}{S}$$

ou ρ_T est appelé la résistivité thermique $\rho_T = \dfrac{1}{\lambda}$ par analogie avec la résistivité électrique ρ apparaissant dans la formule bien connue $R_e = \rho \dfrac{l}{S}$ (résistance électrique d'un conducteur de longueur l et de section S).

On définira également une résistance thermique correspondant à une surface unité.

$r_T = \dfrac{1}{\lambda}$ exprimé en m² °C /W

Considérons maintenant plusieurs corps de résistances thermiques R_{T1} , R_{T2} , etc ... placés en série.



S'il existe un gradient de température suivant une normale aux surfaces de séparation, celles-ci coïncideront avec les isothermes T_1 , T_2 , T_3 ...T_{n+1} . On a, en écrivant que le flux de chaleur est conservatif :

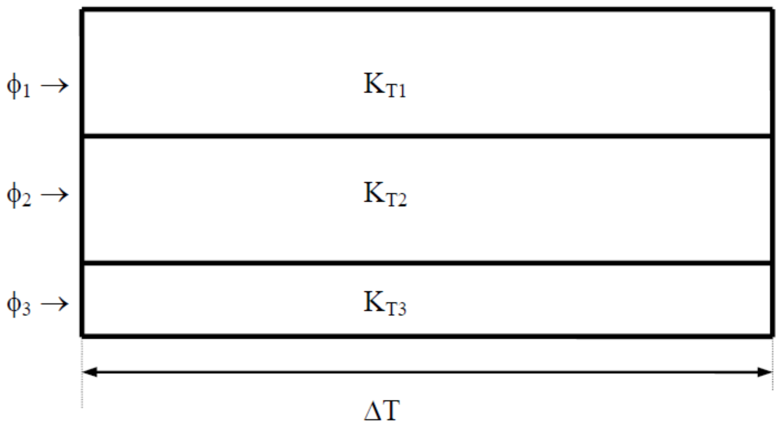
$$\Phi = \frac{1}{R_{T1}}(T_1 - T_2) = \frac{1}{R_{T2}}(T_2 - T_3) = \ldots = \frac{1}{R_{Tn-1}}(T_n - T_{n+1})$$

d'où : $$\Phi = \frac{T_1 - T_{n+1}}{R_T}$$

avec $$R_T = \sum_{i=1}^{n} R_{Ti}$$

Les corps placés en série ont donc leurs résistances thermiques qui s'ajoutent.

Pour les corps placés en parallèle on a :



$\phi_1 = K_{T1}\ \Delta T$

$\phi_2 = K_{T2}\ \Delta T$

$\phi_3 = K_{T3}\ \Delta T$

etc---

Or $\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 +$ -------

d'où : $$\phi = \Delta T \sum_{i=1}^{n} K_{Ti} = \Delta T \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_{Ti}}$$

Ce sont les conductances thermiques qui s'ajoutent.

Remarque : Ces problèmes ont de multiples applications techniques : parois multicouches dans le bâtiment, revêtements et isolations de wagons ou chambres frigorifiques, etc... Nous traiterons quelques exemples précis à titre d'exercice.

2.5.2 Résistances thermiques du cylindre et de la sphère

$$\Phi_{cylindre} = 2\,\pi\,\lambda\,\frac{T_1 - T_2}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

$$\Phi_{sphère} = 4\,\pi\,\lambda\,\frac{r_1\,r_2\,(T_1 - T_2)}{r_2 - r_1}$$

La comparaison avec la formule de définition de la résistance thermique $R_T = \frac{T_1 - T_2}{\Phi}$) donne :

$$R_T\text{ , cylindre} = \frac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{2\,\pi\,\lambda}\text{ (pour une longueur d'unité)}$$

$$R_T\text{ , sphère} = \frac{r_2 - r_1}{4\,\pi\,\lambda\,r_1\,r_2}$$

Comme dans le cas du mur traité précédemment, nous démontrerions que les résistances thermiques de corps cylindriques ou de corps sphériques placés en série s'ajoutent. Les applications techniques sont là aussi importantes. Citons par exemple le calcul de l'isolation thermique de canalisations de transport de fluides caloporteurs ou frigorigènes.