CHAPITRE 1 : Résoudre les équations différentielles du 1ère ordre de la forme : $\boxed{\frac{dy}{dx}=F(x,y)}$

Dans ce chapitre on va étudier cinq types des équations suivant :

1. Equation à variable séparées (E.V.S) : $\frac{dy}{dx}=\frac{F(x)}{G(y)}$ ou bien $\boxed{G(y).dy=F(x).dx}$

On intègre les deux membres de l'équation on trouve $\boxed{\int G(y).dy=\int F(x).dx+C}$

Ex : $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y.Cos(y^2).(1+x^2)}$ on fait la séparation des variables et puit on intègre les deux membres de l'équation $\rightarrow \int 2.y.Cos(y^2).dy=\int \frac{2.x.dx}{1+x^2}+C \rightarrow$ $\boxed{Sin(y^2)=Ln(1+x^2)+C}$

On a : $\int Cos(F).dF=Sin(F)$ et $\int \frac{dF}{F}=Ln(F)$

2. Equation Homogène : $\boxed{\frac{dy}{dx}=F\left(\frac{y}{x}\right)}$ on se ramène à une **(E.V.S)** Si on pose un changement variable

$\boxed{z=\frac{y}{x} \Rightarrow y=x.z}$ on dérive /x $\boxed{\Rightarrow \frac{dy}{dx}=1.z+x.\frac{dz}{dx}}$

On remplace dans l'équation $\frac{dy}{dx}=F\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow z+x.\frac{dz}{dx}=F(z) \Rightarrow x.\frac{dz}{dx}=F(z)-z \Rightarrow$ $\boxed{\int \frac{dz}{F(z)-z}=\int \frac{dx}{x}+C}$

Ex : $\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{y^2+3.x.y+5.x^2}{x^2}} \rightarrow \frac{dy}{dx}=\left(\frac{y}{x}\right)^2+3.\left(\frac{y}{x}\right)+5$ (E.H) : on pose $z=\frac{y}{x} \rightarrow y=x.z$ on dérive /x

$\rightarrow \frac{dy}{dx}=1.z+x.\frac{dz}{dx}$ (on remplace dans EH) $\rightarrow z+x.\frac{dz}{dx}=z^2+3.z+5 \rightarrow \int \frac{dz}{z^2+2.z+5}=\int \frac{dx}{x}+C$

$\rightarrow \int \frac{dz}{(z+1)^2+2^2}=\int \frac{dx}{x}+C \rightarrow \frac{1}{2}Arc\tan\left(\frac{z+1}{2}\right)=Ln(x)+c \rightarrow$ $\boxed{\frac{1}{2}Arc\tan\left(\frac{y+x}{2.x}\right)=Ln(x)+c}$

On a : $\int \frac{dF}{a^2+F^2}=\frac{1}{a}.ArcTan\left(\frac{F}{a}\right)$ et $\int \frac{dF}{F}=Ln(F)$

3. Equation Linéaire : $\boxed{\frac{dy}{dx}+P(x).y=Q(x)}$

- **Recherche la Solution Homogène** $\boxed{y_H=?\rightarrow}$ Résoudre Equation Sans Second Membre (E.S.S.M)

$$\frac{dy_H}{dx}+P(x).y_H=0 \Rightarrow \int \frac{dy_H}{y_H}=-\int P(x).dx+C \Rightarrow Ln(y_H)=-\int P(x).dx+C$$

$$\boxed{\Rightarrow y_H=e^{-\int P(x).dx}.e^C \Rightarrow y_H=K.e^{-\int P(x).dx}}$$

- **Recherche la Solution Totale** $y_T=?\rightarrow$ **Résoudre Equation Avec Second Membre (E.A.S.M), on utilise la méthode de variation de constant:** Dans cette méthode on prend la forme de y_T est la même forme y_H, sauf que la constant K est variable en fonction de x donc: $\boxed{y_T=K(x).e^{-\int P(x).dx}}$ on doit calculer $K(x)=?$, on calcule $\boxed{\frac{dy_T}{dx}=\frac{dK(x)}{dx}.e^{-\int P(x).dx}-p(x).e^{-\int P(x).dx}.K(x)}$ et on remplace dans l'équation :

$$\frac{dy_T}{dx}+P(x).y_T=Q(x) \Rightarrow \frac{dK(x)}{dx}.e^{-\int P(x).dx}-p(x).e^{-\int P(x).dx}.K(x)+K(x).p(x).e^{-\int P(x).dx}=Q(x)$$

$$\boxed{\int dK(x)=K(x)=\int Q(x).e^{\int P(x).dx}.dx+C}$$

4. équation différentielle de Bernoulli : $\boxed{\frac{dy}{dx}+P(x).y=Q(x).y^{\alpha}}$

On se ramène au type linéaire en divisant par y^{α}, puis on pose $\boxed{Z=y^{1-\alpha}}$ et on dérive /x

$\frac{dz}{dx}=(1-\alpha).y^{-\alpha}.\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow y^{-\alpha}.\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(1-\alpha)}\frac{dz}{dx}$ on remplace dans l'équation :

$$\frac{dy}{dx}+P(x).y=Q(x).y^{\alpha} \Rightarrow y^{-\alpha}\frac{dy}{dx}+P(x).y^{1-\alpha}=Q(x) \quad \Rightarrow \frac{1}{(1-\alpha)}\frac{dz}{dx}+P(x).z=Q(x)$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx}+(1-\alpha)P(x).z=(1-\alpha).Q(x) \Rightarrow \boxed{\frac{dz}{dx}+P_1(x).z=Q_1(x)}$$ (Équation linéaire)

---

5. Equation Quasi Homogène : $\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{a_1.x+b_1.y+c_1}{a_2.x+b_2.y+c_2}}$ on trouve 3 cas :

1ere cas (C_1 =0 et C_2=0) $\rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{a_1.x+b_1.y}{a_2.x+b_2.y}=\frac{x.\left(a_1+b_1.\frac{y}{x}\right)}{x.\left(a_2+b_2.\frac{y}{x}\right)}=\frac{a_1+b_1.\frac{y}{x}}{a_2+b_2.\frac{y}{x}}=F\left(\frac{y}{x}\right)$ (c'est un type de l'équation Homogène) on pose $z=\frac{y}{x} \Rightarrow y=x.z \Rightarrow \frac{dy}{dx}=1.z+x.\frac{dz}{dx}$ on remplace dans l'équation

$$\frac{dy}{dx}=F\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow z+x.\frac{dz}{dx}=F(z) \Rightarrow x.\frac{dz}{dx}=F(z)-z \rightarrow \boxed{\int\frac{dz}{F(z)-z}=\int\frac{dx}{x}+K}$$ (E.V.S)

Exemple : $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}=\frac{1+y/x}{1-y/x} \rightarrow z+x.\frac{dz}{dx}=\frac{1+z}{1-z} \rightarrow \int\frac{1-z}{1+z^2}.dz=\int\frac{dx}{x}+C$

$$\rightarrow \int\frac{1.dz}{1+z^2}-\frac{1}{2}\int\frac{2.z}{1+z^2}.dz=\int\frac{dx}{x}+C \rightarrow ArcTan(z)-\frac{1}{2}.Ln(1+z^2)=Ln(x)+C$$

$$\boxed{ArcTan\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{2}.Ln\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)=Ln(x)+C}$$

2eme cas ($C_1\neq 0$ ou $C_2\neq 0$) on calcul $\boxed{\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=a_1.b_2-a_2.b_1}$

Si $\Delta=0 \Rightarrow a_1.b_2-a_2.b_1=0 \Rightarrow a_1.b_2=a_2.b_1 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=R \Rightarrow \boxed{\begin{cases}a_1=R.a_2\\ b_1=R.b_2\end{cases}}$ on remplace dans l'équation

$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1.x+b_1.y+c_1}{a_2.x+b_2.y+c_2}=\frac{\mathrm{R}.(a_2.x+b_2.y)+c_1}{a_2.x+b_2.y+c_2}$ Dans ce cas on prend un changement variable comme suit :

$z=a_2.x+b_2.y \Rightarrow y=(z-a_2.x)/b_2 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=(\frac{dz}{dx}-a_2.1)/b_2$ on remplace dans l'équation

$$\Rightarrow (\frac{dz}{dx}-a_2.1)/b_2=\frac{\mathrm{R}.Z+c_1}{Z+c_2} \Rightarrow \frac{dz}{dx}=b_2.\frac{\mathrm{R}.Z+c_1}{Z+c_2}+a_2=F(z) \quad \boxed{\Rightarrow\int\frac{dz}{F(z)}=\int dx+K}$$ **(E.V.S)**

Exemple : $\frac{dy}{dx}=\frac{-3.x-3.y+1}{x+y+1}=\frac{-3.(x+y)+1}{(x+y)+1}$ on pose $z=x+y \Rightarrow y=z-x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}-1$ on remplace dans l'équation : $\frac{dz}{dx}-1=\frac{-3.z+1}{z+1} \rightarrow \int\frac{z+1}{z-1}dz=-2.\int dx+C \rightarrow \int\frac{z-1+2}{z-1}dz=-2.\int dx+C$

$$\rightarrow \int 1.dz+\int\frac{2.dz}{z-1}=-2.\int dx+C \rightarrow z+2.\mathrm{Ln}(z-1)=-2.x+C \rightarrow \boxed{3.x+y+2.\mathrm{Ln}(x+y-1)=C}$$

3^{eme} cas $(C_1 \neq 0$ **ou** $C_2 \neq 0$ **et** $\Delta \neq 0)$ Dans ce cas on prend un changement variable comme suit:

$\boxed{\begin{cases} x = x_1 - \alpha \\ y = y_1 - \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = dx_1 \\ dy = dy_1 \end{cases}}$ on remplace dans l'équation $\dfrac{dy_1}{dx_1} = \dfrac{(a_1.x_1 + b_1.y_1) - a_1.\alpha - b_1.\beta + c_1}{(a_2.x_1 + b_2.y_1) - a_2.\alpha - b_2.\beta + c_2}$

On calcule α et β de tel sort $\begin{cases} -a_1.\alpha - b_1.\beta + c_1 = 0 \\ -a_2.\alpha - b_2.\beta + c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left\{ \alpha = \dfrac{\Delta_\alpha}{\Delta} \; ; \beta = \dfrac{\Delta_\beta}{\Delta} \right.$

Tel que $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ et $\Delta_\alpha = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_1 & b_2 \end{vmatrix}$ et $\Delta_\beta = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ on se ramène à une équation homogène comme le 1^{ere} cas

Donc on trouve comme le 1^{ere} cas : $\boxed{\dfrac{dy_1}{dx_1} = \dfrac{a_1.x_1 + b_1.y_1}{a_2.x_1 + b_2.y_1}}$

Exemple : $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + y + 5}{x - y + 4}}$ $(C_1 = 5 \neq 0$ **ou** $C_2 = 4 \neq 0$ **et** $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0)$ **on fait des changement variables comme suit :** $\begin{cases} x = x_1 - \alpha \\ y = y_1 - \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = dx_1 \\ dy = dy_1 \end{cases}$ On remplace dans l'équation on trouve

$\dfrac{dy_1}{dx_1} = \dfrac{(x_1 + y_1) - \alpha - \beta + 5}{(x_1 - y_1) - \alpha + \beta + 4}$, On calcule α et β de tel sort $\boxed{\begin{cases} -\alpha - \beta + 5 = 0 \\ -\alpha + \beta + 4 = 0 \end{cases} \to \left\{ \alpha = \dfrac{9}{2} \; ; \beta = \dfrac{1}{2} \right.}$

On se ramène à une équation homogène comme le 1^{ere} cas donc on trouve : $\dfrac{dy_1}{dx_1} = \dfrac{x_1 + y_1}{x_1 - y_1}$

La solution est :

$$ArcTan\left(\frac{y_1}{x_1}\right) - \frac{1}{2}.Ln\left(1 + \left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2\right) = Ln(x_1) + C \to \boxed{ArcTan\left(\frac{y + 1/2}{x + 9/2}\right) - \frac{1}{2}.Ln\left(1 + \left(\frac{y + 1/2}{x + 9/2}\right)^2\right) = Ln(x + 9/2) + C}$$

TD N : 01 (Module Math 3)

Résoudre Les Equations Différentielles Du Premier Ordre suivantes :

Ex 01 : Equation à variables séparées : $\boxed{\to \; G(y).dy = F(x).dx}$

- $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = x * y} \to \dfrac{dy}{y} = x.dx$ (on intègre les deux membres de l'équation on trouve)

  $\to \int \dfrac{dy}{y} = \int x.dx + C \quad \to Ln(y) = \dfrac{1}{2}.x^2 + C \; \to \boxed{\to \; y = K.\exp(\dfrac{1}{2}.x^2)}$

- $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(3.Ln(x) + 1).y}{x.Ln(x)}} \to \int \dfrac{dy}{y} = \int \dfrac{(3.Ln(x) + 1)}{x.Ln(x)} dx + C \; \to \int \dfrac{dy}{y} = \int \dfrac{3dx}{x} + \int \dfrac{dx}{x.Ln(x)} + C$

  $\to Ln(y) = 3.Ln(x) + Ln(Ln(x) + Ln(K) \to Ln(y) = Ln(K.x^3.Ln(x))$ $\boxed{y = K.x^3.Ln(x)}$

Ex 02 : Equation homogène : $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = F\left(\dfrac{y}{x}\right)}$

- $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{x.(x + y)}} \to \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{x^2.\left(1 + \dfrac{y}{x}\right)} = \dfrac{\dfrac{y^2}{x^2}}{\left(1 + \dfrac{y}{x}\right)}$ (E.H) : on pose $z = \dfrac{y}{x} \; \to \; y = x.z$ on dérive /x

  $\to \dfrac{dy}{dx} = 1.z + x.\dfrac{dz}{dx}$ (on remplace dans l'EH) $\to \; z + x.\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z^2}{1 + z} \to \; x.\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{-z}{1 + z}$

$\to \dfrac{(z + 1).dz}{z} = -\dfrac{dx}{x} \to \int 1.dz + \int \dfrac{dz}{z} = -\int \dfrac{dx}{x} + C \to \; z + Ln(z) = -Ln(x) + C \; \to \boxed{\dfrac{y}{x} + Ln(\dfrac{y}{x}) = -Ln(x) + C}$

Ex 03 : Equation linéaire : $\boxed{\frac{dy}{dx}+P(x).y=Q(x)}$

- $\boxed{\frac{dy}{dx}-2.x.y=\exp(x^2).\sin(x)}$

• **Recherche la Solution Homogène** $y_H=?\rightarrow$ **Résoudre Equation Sans Second Membre (E.S.S.M)**

$$\frac{dy_H}{dx}-2.x.y_H=0\rightarrow\int\frac{dy_H}{y_H}=\int 2.x.dx+C\rightarrow\ Ln(y_H)=x^2+C\ \rightarrow\ y_H=e^{x^2}.e^C\ \rightarrow\boxed{y_H=K.e^{x^2}}$$

• **Recherche la Solution Totale** $y_T=?\rightarrow$ **Résoudre Equation Avec Second Membre (E.A.S.M), on utilise la méthode de variation de constant:** Dans cette méthode on prend la forme de y_T est la même forme y_H, sauf que la constant K est variable en fonction de x donc: $\boxed{y_T=K(x).e^{x^2}}$ **on doit calculer** $K(x)=?$**, on calcule** $\boxed{\frac{dy_T}{dx}=\frac{dK(x)}{dx}.e^{x^2}-2.x.e^{x^2}.K(x)}$ **et on remplace dans l'équation :**

$$\frac{dy}{dx}-2.x.y=\exp(x^2).\sin(x)\Rightarrow\frac{dK(x)}{dx}.e^{x^2}+2.x.e^{x^2}.K(x)-2.x.e^{x^2}.K(x)=e^{x^2}.\sin(x)$$

$\int dK(x)=K(x)=\int\sin(x)\ .dx+C=-\cos(x)+C$ **Donc** $\boxed{y=\left(C-\cos(x)\right)*\exp(x^2)}$

Ex 04 : Equation de Bernoulli : $\boxed{\frac{dy}{dx}+P(x).y=Q(x).y^{\alpha}}$

- $\boxed{\frac{dy}{dx}-\frac{1-2.x}{2.x^2}\ y=-\frac{1}{2}.y^3}$ On se ramène au type linéaire en divisant par $y^3\rightarrow$, $\boxed{y^{-3}.\frac{dy}{dx}-\frac{1-2.x}{2.x^2}.y^{-2}=-\frac{1}{2}}$

puis on pose $\boxed{Z=y^{-2}}$ et on dérive /x $\rightarrow\ \frac{dz}{dx}=-2.y^{-3}.\frac{dy}{dx}\ \rightarrow\ \boxed{y^{-3}.\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}.\frac{dz}{dx}}$ on remplace dans l'équation $\boxed{-\frac{1}{2}.\frac{dz}{dx}-\frac{1-2.x}{2.x^2}.z=-\frac{1}{2}}$ on trouve équation linéaire $\boxed{\frac{dz}{dx}+\frac{1-2.x}{x^2}.z=1}$

• **Recherche la Solution Homogène** $\boxed{Z_H=?\rightarrow}$**Résoudre Equation Sans Second Membre (E.S.S.M)**

$$\frac{dZ_H}{dx}+\frac{1-2.x}{x^2}.Z_H=0\rightarrow\int\frac{dZ_H}{Z_H}=\int\frac{2.x-1}{x^2}.dx+C\rightarrow\ Ln(Z_H)=2.\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x^2}+C$$

$$Ln(Z_H)=2.Ln(x)+\frac{1}{x}+C\rightarrow Z_H=x^2.\mathrm{e}^{1/x}.e^C\ \rightarrow\ \boxed{Z_H=K.x^2.\mathrm{e}^{1/x}}$$

• **Recherche la Solution Totale** $\boxed{Z_T=?\rightarrow}$**Résoudre Equation Avec Second Membre (E.A.S.M), on utilise la méthode de variation de constant :**

$\boxed{Z_T=K(x).x^2.\mathrm{e}^{1/x}}$ **on dérive /x** $\rightarrow\frac{dZ_T}{dx}=\frac{dK(x)}{dx}.\left(x^2.\mathrm{e}^{1/x}\right)+K(x).\frac{d}{dx}\left(x^2.\mathrm{e}^{1/x}\right)$

$\boxed{\rightarrow\frac{dZ_T}{dx}=\frac{dK(x)}{dx}.\left(x^2.\mathrm{e}^{1/x}\right)+K(x).\left(2.x.\mathrm{e}^{1/x}-\mathrm{e}^{1/x}\right)}$ **on remplace dans l'eq** $\frac{dZ_T}{dx}+\frac{1-2.x}{x^2}Z_T=1$ **on trouve**

$$\frac{dK(x)}{dx}.\left(x^2.\mathrm{e}^{1/x}\right)+K(x).\left(2.x.\mathrm{e}^{1/x}-\mathrm{e}^{1/x}\right)+\frac{1-2.x}{x^2}K(x).x^2.\mathrm{e}^{1/x}=1\rightarrow\boxed{\int dK(x)=K(x)=\int\frac{1}{x^2}.\mathrm{e}^{-1/x}.dx+C=\mathrm{e}^{-1/x}+C}$$

Donc : $Z=\left(\mathrm{e}^{-1/x}+C\right).x^2.\mathrm{e}^{1/x}=y^{-2}\ \rightarrow\boxed{y=1/\sqrt{\left(\mathrm{e}^{-1/x}+C\right).x^2.\mathrm{e}^{1/x}}}$

- $\frac{dy}{dx}-\frac{4}{x}.y=x.\sqrt{y}$ On se ramène au type linéaire en divisant par $y^{\frac{1}{2}}\rightarrow$, $\boxed{y^{-1/2}.\frac{dy}{dx}-\frac{4}{x}.y^{1/2}=x}$ puis on pose

$\boxed{Z=y^{1/2}}$ et on dérive /x $\rightarrow\ \frac{dz}{dx}=\frac{1}{2}y^{-1/2}.\frac{dy}{dx}$ $\boxed{\Rightarrow y^{-1/2}.\frac{dy}{dx}=2.\frac{dz}{dx}}$ on remplace dans l'équation on trouve équation linéaire $\rightarrow\frac{dZ}{dx}-\frac{2}{x}.Z=x$ la solution est $\rightarrow z=x^2.\left(Ln(\sqrt{x})+C\right)=y^{1/2}\rightarrow\boxed{y=x^4.\left(Ln(\sqrt{x})+C\right)^2}$