Chapitre 2 : équations différentielles 2 ^{eme} ordre linéaire à coefficient constant :

$\boxed{a.\frac{d^2y}{dx^2}+b.\frac{dy}{dx}+c.y=f(\mathrm{x})}$; (***a, b, c*** sont des constant)

2.1: Recherche la solution Homogène $y_H=?\rightarrow$ (Résoudre équation sans second membre E.S.S.M

$\boxed{a.\frac{d^2y}{dx^2}+b.\frac{dy}{dx}+c.y=0}$) . On accepte sans démonstration les points suivant :

- La solution de **(E.S.S.M)** est sous forme exponentielle $\boxed{y=\mathrm{e}^{(R.x)}}$
- Equation **2eme** ordre admet deux solutions différant y_1 et y_2 Tel que $\boxed{\frac{y_2}{y_1}\neq C^{st}=\psi(x)}$
- Dans le cas au $\frac{y_2}{y_1}=C^{st}$ on prend $\psi(x)=x$
- La solution Homogène y_H est une combinaison linéaire entre les deux solutions y_1 et y_2: $\rightarrow$ $\boxed{y_H=C_1.y_1+C_2.y_2}$

Pour Calculer les solutions y_1 et y_2 on doit remplacer $y=\mathrm{e}^{(R.x)}$ dans **E.S.S.M** Tel que :

$$\begin{cases} y=\mathrm{e}^{(R.x)} \\ \frac{dy}{dx}=R.\mathrm{e}^{(R.x)} \\ \frac{d^2y}{dx^2}=R^2.\mathrm{e}^{(R.x)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c*y=c*\mathrm{e}^{(R.x)} \\ b*\frac{dy}{dx}=b*R.\mathrm{e}^{(R.x)} \\ a*\frac{d^2y}{dx^2}=a*R^2.\mathrm{e}^{(R.x)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \textbf{E.S.S.M}\rightarrow a.\frac{d^2y}{dx^2}+b.\frac{dy}{dx}+c.y=0 \\ \rightarrow \mathrm{e}^{(R.x)}*\left[a.R^2+b.R+c\right]=0 \end{cases}$$

Dans ce cas on déduire l'équation caractéristique $\boxed{(a.R^2+b.R+c=0)}$, calcule le discriminant $\boxed{\Delta=b^2-4.a.c}$

On trouve 3 cas :

- **1^{ere}cas** $\Delta>0$ **(deux solution différant réel)**

$$\begin{cases} R_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2.a} \Rightarrow y_1=e^{R_1.x} \\ R_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2.a} \Rightarrow y_2=e^{R_2.x} \end{cases} \Rightarrow \boxed{y_H=C_1.y_1+C_2.y_2=C_1.e^{R_1.x}+C_2.e^{R_2.x}}$$

- **2eme cas** $\Delta=0$ **(il y a une solution double)**

$$R_1=R_2=\frac{-b}{2.a}\Rightarrow \begin{cases} y_1=e^{\frac{-b}{2.a}.x} \\ y_2=x.e^{\frac{-b}{2.a}.x} \end{cases} \Rightarrow \boxed{y_H=C_1.y_1+C_2.y_2=e^{\frac{-b}{2.a}.x}\left(C_1+C_2.x\right)}$$

- **3eme cas** $\Delta<0$ **(il y a des racines complexes)** $\boxed{\Rightarrow\Delta=-\lambda^2=I^2.\lambda^2}$

$$\begin{cases} R_1=\frac{-b-I.\lambda}{2.a}=\frac{-b}{2.a}-\frac{\lambda}{2.a}.I=\alpha-\beta.I \\ R_2=\frac{-b+I.\lambda}{2.a}=\frac{-b}{2.a}+\frac{\lambda}{2.a}.I=\alpha+\beta.I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1=e^{(\alpha-\beta.I).x} \\ y_2=e^{(\alpha+\beta.I).x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1=e^{\alpha.x}.(\cos(\beta.x)-\mathrm{I}.\sin(\beta.x)) \\ y_2=e^{\alpha.x}.(\cos(\beta.x)+\mathrm{I}.\sin(\beta.x)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_H=C_1.y_1+C_2.y_2=e^{\alpha.x}.\left((\mathrm{c}_1+\mathrm{c}_2).\cos(\beta.x)+\mathrm{I}.(\mathrm{c}_2-\mathrm{c}_1).\sin(\beta.x)\right)$$

$\Rightarrow \boxed{y_H=e^{\alpha.x}.\left(K_1.\cos(\beta.x)+K_2.\sin(\beta.x)\right)}$ Dans ce cas on doit reformuler les solutions y_1 et y_2

$$\boxed{y_H=K_1.y_1+K_2.y_2\Rightarrow \begin{cases} y_1=e^{\alpha.x}.\cos(\beta.x) \\ y_2=e^{\alpha.x}.\sin(\beta.x) \end{cases}}$$

Ex1: $\frac{d^2y}{dx^2}-5.\frac{dy}{dx}+6.y=0$	**Ex2:** $\frac{d^2y}{dx^2}-4.\frac{dy}{dx}+4.y=0$	**Ex3:** $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y=0$
$y_H=C_1.e^{2.x}+C_2.e^{3.x}$	$y_H=e^{2.x}\left(C_1+C_2.x\right)$	$y_H=e^{\frac{-1}{2}.x}.\left(C_1.\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}.x)+C_2.\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}.x)\right)$

2.2 : Recherche la solution Totale $y_T = ? \rightarrow$ (Résoudre équation Avec second membre E.A.S.M)

Pour calculer la solution Totale En utilisant deux méthodes :

2.2.1 : Méthode de variation de constant :

Dans cette méthode on prend la forme de y_T est la même forme y_H c'est-à-dire $\boxed{y_T = C_1(x).y_1 + C_2(x).y_2}$, sauf que les constant C_1 *et* C_2 sont des variable en fonction de x dont les dérivées sont déterminées par le système suivant :

$$\boxed{\begin{cases} y_1.C_1'_{(x)} + y_2.C_2'_{(x)} = 0 \\ y_1'.C_1'_{(x)} + y_2'.C_2'_{(x)} = \dfrac{F(x)}{a} \end{cases}} \xrightarrow[\text{de systeme}]{\text{La solution}} \boxed{\begin{cases} \dfrac{dC_1(x)}{dx} = \psi_1(x) \\ \dfrac{dC_2(x)}{dx} = \psi_2(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int dC_1(x) = C_1(x) = \int \psi_1(x).dx + K1 \\ \int dC_2(x) = C_2(x) = \int \psi_2(x).dx + K2 \end{cases}}$$

2.2.2 : Méthode recherche solution particulaire y_P :

Dans cette méthode on pose que la forme de **la Solution Totale = Solution Homogène + Solution particulaire**

$$\Rightarrow y_T = y_H + y_P$$

La forme de y_P est obtenu à partir de la fonction F(x), on trouve 2 Cas principale :

- **1 ere cas** :

$\boxed{F(x) = P_N(x).e^{S.x} = (P_0 + P_1.x + P_2.x^2 + ... + P_N.x^N).e^{S.x}}$; $P_N(x)$: polynôme ordre N.

$\boxed{y_P = a_N(x).e^{S.x}.x^m = (a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + ... + a_N.x^N).e^{S.x}.x^m}$; $a_N(x)$: polynôme ordre N.

Tel que $\boxed{a_0, a_1, a_2 ..... a_N}$ Sont des constant calculer par l'identification avec la fonction F(x) si on remplace dans l'**E.A.S.M**.

et le terme x^m est introduit pour **éviter** la répétition des solutions $\boxed{y_1 = e^{R_1.x}}$ et $\boxed{y_2 = e^{R_2.x}}$ de E.S.S.M dans la solution particulaire $\boxed{y_P = e^{S.x}}$ c'est-à-dire : $\Rightarrow \boxed{\begin{cases} m = 0 \rightarrow S \neq R_1 \ \ et \ \ R_2 \\ m = 1 \rightarrow S = R_1 \ \ ou \ \ R_2 \\ m = 2 \rightarrow S = R_1 \ \ et \ \ R_2 \end{cases}}$

- **2 eme cas** :

$$\boxed{F(x) = e^{S.x}.(P_{N1}(x).\cos(\gamma.x) + Q_{N2}(x).\sin(\gamma.x))}$$

$P_{N1}(x) = P_0 + P_1.x + P_2.x^2 + ... + P_{N1}.x^{N1}$: Polynôme ordre N1

$Q_{N2}(x) = Q_0 + Q_1.x + Q_2.x^2 + ... + Q_{N2}.x^{N2}$: Polynôme ordre N2

La forme de **Solution particulaire :** $\boxed{y_P = e^{S.x}.(a_N(x).\cos(\gamma.x) + b_N(x).\sin(\gamma.x)).x^m}$

$a_N(x) = a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + ... + a_N.x^N$: Polynôme ordre N

$b_N(x) = b_0 + b_1.x + b_2.x^2 + ... + b_N.x^N$: Polynôme ordre N

Tel que $\boxed{a_0, a_1, a_2 ..... a_N}$ et $\boxed{b_0, b_1, b_2 ..... b_N}$ Sont des constant calculer par l'identification avec la fonction F(x), si on remplace dans l'**E.A.S.M**.

N: le degré de polynôme $a_N(x)$. et $b_N(x)$. Tel que $\boxed{N = \mathbf{MAX}(N1, N2)}$

et le terme x^m est introduit pour **éviter** la répétition des solutions $\boxed{y_1 = e^{\alpha.x}.\cos(\beta.x)}$ et $\boxed{y_2 = e^{\alpha.x}.\sin(\beta.x)}$ de **E.S.S.M** dans les solution particulaire $\boxed{y_P = e^{S.x}.\cos(\gamma.x)}$ et $\boxed{y_P = e^{S.x}.\sin(\gamma.x)}$ c'est-à-dire:

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} m = 0 \rightarrow S + \gamma.I \neq \alpha + \beta.I \\ m = 1 \rightarrow S + \gamma.I = \alpha + \beta.I \end{cases}}$$

Remarque :

- dans le cas $\boxed{F(x)=\sum_{I}^{N}F_I(x)}$ La solution particulaire $\boxed{y_P(x)=\sum_{I}^{N}\left(y_P(x)\right)_I}$

  Tel que : $yp_1 \to F_1$ et $yp_2 \to F_2$; …. $yp_N \to F_N$
- Méthode Recherche Solution Particulaire est valable seulement pour F(x) de forme suivant :

polynôme	***exponentielle ordre 1:***	***Cosinus ordre 1 :***	***Sinus ordre 1 :***
x^N	$e^{S.x}$	$\cos(\gamma.x)$	$\sin(\gamma.x)$

- La Méthode de variation de constant est valable pour toutes les fonctions F (x).

TD 02 (module Math 3)

Résoudre Les Equations Différentielles 2eme Ordre suivant :

Par la méthode variation des constants

➢ $\boxed{\frac{d^2y}{dx^2}+3.\frac{dy}{dx}+2.y=\frac{x-1}{x^2}.e^{-x}}$

E.S.S.M : $\frac{d^2y}{dx^2}+3.\frac{dy}{dx}+2.y=\to E.C \to R^2+3.R+1=0 \to \begin{cases}R_1=-1\\R_2=-2\end{cases} \to \begin{cases}y_1=e^{-x}\\y_2=e^{-2.x}\end{cases}$

La Solution Homogène: $y_H=C_1.y_1+C_2.y_2 \to \boxed{y_H=C_1.e^{-x}+C_2.e^{-2.x}}$

La Solution Totale: **la méthode variation des constants** $y_T=C_1(\text{x}).\cos(x)+C_2(\text{x}).\sin(x)$

on calcul $C_1(\text{x})=?$ $C_2(\text{x})=?$; On construire le système de dérives des constants :

$$\boxed{\begin{cases}y_1.C_1{'}_{(x)}+y_2.C_2{'}_{(x)}=0\\ y_1{'}.C_1{'}_{(x)}.+y_2{'}.C_2{'}_{(x)}=\frac{F(x)}{a}\end{cases}} \to \begin{cases}e^{-x}.C_1{'}_{(x)}+e^{-2.x}.C_2{'}_{(x)}=0 & \text{......................(1)}\\ -e^{-x}.C_1{'}_{(x)}-2.e^{-x}.C_2{'}_{(x)}=\frac{x-1}{x^2}.e^{-x} & \text{................(2)}\end{cases}$$

$(1)+(2) \to C_2{'}_{(x)}=\frac{d}{dx}C_2(x)=-\frac{x-1}{x^2}.e^{x} \to \int dC_2=C_2(x)=-\int\frac{x-1}{x^2}.e^{x}.dx+K_2 \to \boxed{C_2(x)=-\frac{e^{x}}{x}+K_2}$

On a $\int\frac{V.dU-U.dV}{V^2}=\int d\left(\frac{U}{V}\right)=\frac{U}{V} \to \boxed{-\int\frac{x-1}{x^2}.e^{x}.dx=-\int\frac{x.e^{x}.dx-1.e^{x}.dx}{x^2}=-\int d\left(\frac{e^{x}}{x}\right)=-\frac{e^{x}}{x}}$

$(1)\to C_1{'}=\frac{dC_1}{dx}=\frac{x-1}{x^2}\to \boxed{\int dC_1=C_1(x)=\int\frac{x-1}{x^2}.dx=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x^2}=Ln(x)+\frac{1}{x}+K_1}$

$$\boxed{y_T=\left(Ln(x)+\frac{1}{x}+K_1\right).e^{-x}+\left(-\frac{e^{x}}{x}+K_2\right).e^{-2.x}}$$

Par la méthode recherche solution particulaire yp ; $y_T=y_H+y_p$

➢ $\boxed{3.y''+y'-4.y=(x+1).\text{e}^{2.x}}$

E.S.S.M : $3.y''+y'-4.y=0\to E.C \to 3.r^2+r-4=0 \to \begin{cases}R_1=-\frac{4}{3}\\R_2=1\end{cases} \to \left\{\begin{array}{l}y_1=\exp\left(-\frac{4}{3}.x\right)\\y_2=\exp(x)\end{array}\right\} \to$

La Solution Homogène SH: $\boxed{y_H=C_1.y_1+C_2.y_2=C_1.\exp\left(-\frac{4}{3}.x\right)+C_2.\exp(x)}$

solution particulaire SP : $y_P=?\to F(x)=(x+1).\text{e}^{2.x}=P_N(x).e^{S.x}$; Tel que N=1 ; S=2

Donc la SP ; $yp=a_N(x).e^{S.x}.x^m=\left(a_0+a_1.x\right).e^{S.x}.x^m$

On a $\boxed{S=2\neq R_1\ et\ R_2}$ aucun solution répéter Donc $\boxed{m=0}$

$$\boxed{y_P=(a_0+a_1.x)*\exp(2.x)=(\frac{-3}{100}+\frac{1}{10}.x)*\exp(2.x)}$$

➢ $\boxed{y''-y'=x^2}$

E.S.S.M : $y''-y'=0 \rightarrow E.C \rightarrow R^2-R=0 \rightarrow \begin{cases} R_1=0 \\ R_2=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1=\exp(0.x)=1 \\ y_2=\exp(1.x) \end{cases}$

La Solution Homogène SH: $\boxed{y_H=C_1.y_1+C_2.y_2=C_1+C_2.\exp(x)}$

solution particulaire SP $y_P=?\ \rightarrow\ F(x)=x^2.e^{0.x}=P_N(x).e^{S.x}$; Tel que N=2 ; S=0

Donc la SP ; $yp=a_N(x).e^{S.x}.x^m=\left(a_0+a_1.x+a_2.x^2\right).e^{0.x}.x^m \rightarrow$

On a $\boxed{S=0=R_1}$ une solution répéter Donc $\boxed{m=1}$ $\rightarrow$ $\boxed{y_P=\left(a_0+a_1.x+a_2.x^2\right).x=-2.x-1.x^2-\frac{1}{3}.x^3}$

➢ $\boxed{y''+2.y'+y=e\,\mathrm{xp}(-x)}$

E.S.S.M : $y''+2.y'+y=0 \rightarrow E.C \rightarrow R^2+2.R+1=0 \rightarrow R_1=R_2=-1$ solution double $\begin{cases} y_1=\exp(-x) \\ y_2=x.\exp(-x) \end{cases}$

La Solution Homogène SH: $\boxed{y_H=C_1.y_1+C_2.y_2=\left(C_1+C_2.x\right)\exp(-x)}$

solution particulaire SP $y_P=?\ \rightarrow\ F(x)=1.e^{-x}=P_N(x).e^{S.x}$; Tel que N=0 ; S=-1

Donc la SP ; $yp=a_N(x).e^{S.x}.x^m=\left(a_0\right).e^{-x}.x^m \rightarrow$

On a $\boxed{S=-1=R_1\ et\ R_2}$ deux solution répéter Donc $\boxed{m=2}$ $\rightarrow$ $\boxed{y_P=a_0.\exp(-x).x^2=\frac{1}{2}.x^2.\exp(-x)}$

➢ $\boxed{y''+4.y=10.\exp(x).\sin(3.x)}$

E.S.S.M : $y''+4.y=0 \rightarrow E.C \rightarrow R^2+4=0 \rightarrow R^2=-4=4.I^2 \rightarrow R_{1,2}=0\pm 2.I$

$$\rightarrow R_{1,2}=\alpha\pm\beta.I \rightarrow \left\{\begin{matrix} y_1=e^{\alpha.x}.\cos(\beta.x)=\cos(2.x) \\ y_2=e^{\alpha.x}.\sin(\beta.x)=\sin(2.x) \end{matrix}\right\} \rightarrow$$

La Solution Homogène SH : $\boxed{y_H=C_1.y_1+C_2.y_2=C_1.\cos(2.x)+C_2.\sin(2.x)}$

solution particulaire SP

$F(x)=e^{S.x}.(P_{N1}(x).\cos(\gamma.x)+Q_{N2}(x).\sin(\gamma.x))=e^x.(0.\cos(3.x)+10.\sin(3.x))$; $\boxed{N_1=0\ ;\ N_2=0\ ;\ S=1\ ;\ \gamma=3}$

N=max(N1,N2)=0 $\rightarrow$ $\boxed{y_P=e^{S.x}.(a_0.\cos(\gamma.x)+b_0.\sin(\gamma.x)).x^m}$,

$\boxed{S+\gamma.I=1+3.I\ \neq\ R_1\ et\ R_2}$ aucun solution répéter **Donc** $\boxed{m=0}$

$$\boxed{y_P=e^x(a_0.\cos(\gamma.x)+b_0.\sin(\gamma.x))=e^x(\frac{-15}{13}.\cos(3.x)-\frac{10}{13}.\sin(3.x))}$$

➢ $\boxed{y''+y=x.\sin(x)}$

E.S.S.M : $y''+y=0 \rightarrow E.C \rightarrow R^2+1=0 \rightarrow R^2=-1=I^2 \rightarrow R_{1,2}=0\pm I \rightarrow R_{1,2}=\alpha\pm\beta.I$

$\left\{\begin{matrix} y_1=e^{\alpha.x}.\cos(\beta.x)=\cos(x) \\ y_2=e^{\alpha.x}.\sin(\beta.x)=\sin(x) \end{matrix}\right\} \rightarrow$ **S.H :** $\boxed{y_H=C_1.y_1+C_2.y_2=C_1.\cos(x)+C_2.\sin(x)}$

S.P : $F(x)=e^{S.x}.(P_{N1}(x).\cos(\gamma.x)+Q_{N2}(x).\sin(\gamma.x))=e^{0.x}.(0.\cos(1.x)+x.\sin(1.x))$

$\boxed{N_1=0\ ;\ N_2=0\ ;\ S=1\ ;\ \gamma=3}$

N=max(N1,N2)=1 $\rightarrow$ $\boxed{y_P=e^{S.x}.\left((a_0+a_1.x).\cos(\gamma.x)+(b_0+b_1.x).\sin(\gamma.x)\right).x^m}$,

$\boxed{S+\gamma.I=0+I\ =R_1}$ une solution répéter **Donc** $\boxed{m=1}$

$$\boxed{y_P=(a_0.x+a_1.x^2).\cos(\gamma.x)+(b_0.x+b_1.x^2).\sin(\gamma.x)=-\frac{1}{4}.x^2.\cos(x)+\frac{1}{4}.x.\sin(x)}$$

➢ **essaye de résoudre les mêmes exercices par la méthode de variation de constant.**

➢ $\boxed{y''+4.y'+4.y = x^2.e^{-2.x}}$

E.S.S.M : $y''+4.y'+4.y=0 \rightarrow E.C \rightarrow R^2+4.R+4=0 \rightarrow R_1=R_2=2$ solution double $\begin{cases} y_1 = e^{2.x} \\ y_2 = x.e^{2.x} \end{cases}$

La Solution Homogène SH: $\boxed{y_H = C_1.y_1 + C_2.y_2 = (C_1 + C_2.x)\mathrm{e}^{2.x}}$

La Solution Totale: **la méthode variation des constants**

$y_T = C_1(x).y_1 + C_2(x).y_2 = (C_1(x)+C_2(x).x).e^{2.x}$; on calcul $C_1(\mathrm{x}) = ?$ $C_2(\mathrm{x}) = ?$

On construire le système de dérives des constants :

$$\boxed{\begin{cases} y_1.C_1'_{(x)} + y_2.C_2'_{(x)} = 0 \\ y_1'.C_1'_{(x)}. + y_2'.C_2'_{(x)} = \dfrac{F(x)}{a} \end{cases}} \rightarrow \begin{cases} e^{2.x}.C_1'_{(x)} + x.e^{2.x}.C_2'_{(x)} = 0 & \text{.............................(1)} \\ 2.e^{2.x}.C_1'_{(x)} + (1+2.x).e^{2.x}.C_2'_{(x)} = x^2.e^{-2.x} & \text{.................(2)} \end{cases}$$

$$(2)-2*(1) \rightarrow C_2'_{(x)} = \frac{d}{dx}C_2(x) = x^2.e^{-4.x} \rightarrow \int dC_2 = C_2(x) = -\int x^2.e^{-4.x}.dx + K_2 \rightarrow$$

- **Intégrale de la forme** $\int P_N(x).\exp(a.x).dx = ?$ Tel que $P_N(x)$ est un polynôme de degré N

En intégrant N fois par parties on obtient :

$$\boxed{\int P_N(x).\exp(a.x).dx = \exp(a.x).\left[\frac{P_{N(x)}}{a} - \frac{P'_{N(x)}}{a^2} + \frac{P''_{N(x)}}{a^3} - \ldots\ldots + (-1)^N.\frac{P^{(N)}_{N\ (x)}}{a^{N+1}}\right]}$$

$$\text{Donc : } \boxed{C_2(x) = \int x^2.e^{-4.x}.dx + K_2 = \mathrm{e}^{-4.x}.\left[\frac{x^2}{(-4)} - \frac{2.x}{(-4)^2} + \frac{2}{(-4)^3}\right] + K_2}$$

$$(1) \rightarrow e^{2.x}.C_1'_{(x)} + x.e^{2.x}.C_2'_{(x)} = 0 \rightarrow C_1' = \frac{dC_1}{dx} = -x^3.e^{-4.x} \rightarrow$$

$$\boxed{\int dC_1 = C_1(x) = -\int x^3.e^{-4.x}.dx = -e^{-4.x}.\left[\frac{x^3}{(-4)} - \frac{3.x^2}{(-4)^2} + \frac{6.x}{(-4)^3} - \frac{6}{(-4)^4}\right] + K_1}$$

Concernant les exemples : $\int P_N(x).\mathrm{e}^{\alpha.x}.\cos(\beta.x).dx$, $\int P_N(x).\mathrm{e}^{\alpha.x}.\sin(\beta.x).dx$

$$\text{on basant sur } \boxed{\int P_N(x).\mathrm{e}^{a.x}.dx = \mathrm{e}^{a.x}.\left[\frac{P_{N(x)}}{a} - \frac{P'_{N(x)}}{a^2} + \frac{P''_{N(x)}}{a^3} - \ldots\ldots + (-1)^N.\frac{P^{(N)}_{N\ (x)}}{a^{N+1}}\right]}$$

et on pose que a c'est un Nombre complexe :

$$\boxed{a = \alpha + \beta.I = |a|.e^{I.\theta} = |a|.[\cos(\theta) + I.\sin(\theta)]}$$

Tel que α : la partir réel ; β : la partir imaginaire ; $|a|$: module de a θ : l'argument de a

$$|a| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \quad ; \quad \theta = ArcCos\left(\frac{\alpha}{|a|}\right) \quad ; \quad \theta = ArcSin\left(\frac{\beta}{|a|}\right) \quad ;$$

$$\int P_N(x).\mathrm{e}^{a.x}.dx = \int P_N(x).\mathrm{e}^{(\alpha+\beta.I).x}.dx = \int P_N(x).\mathrm{e}^{\alpha.x}\left(cos(\beta.x) + I.\sin(\beta.x)\right).dx$$

$$\boxed{\begin{aligned} \int P_N(x).\mathrm{e}^{\alpha.x}.\cos(\beta.x).dx = \mathrm{e}^{\alpha.x}.\Bigg[& \left\langle \frac{P_{N(x)}}{|a|}.\cos(\theta) - \frac{P'_{N(x)}}{|a|^2}.\cos(2.\theta) + \ldots..(-1)^N.\frac{P^{(N)}_{N\ (x)}}{|a|^{N+1}}.\cos(N.\theta) \right\rangle.\cos(\beta.x) + \\ & \left\langle \frac{P_{N(x)}}{|a|}.\sin(\theta) - \frac{P'_{N(x)}}{|a|^2}.\sin(2.\theta) + \ldots\ldots.(-1)^N.\frac{P^{(N)}_{N\ (x)}}{|a|^{N+1}}.\sin(N.\theta) \right\rangle.\sin(\beta.x) \Bigg] \end{aligned}}$$

$$\int P_N(x).e^{\alpha.x}.\sin(\beta.x).dx = e^{\alpha.x}.\left[-\left\langle \frac{P_{N(x)}}{|a|}.\sin(\theta) - \frac{P'_{N(x)}}{|a|^2}.\sin(2.\theta) + ...(-1)^N.\frac{P^{(N)}_{N\ (x)}}{|a|^{N+1}}.\sin(N.\theta)\right\rangle.\cos(\beta.x) + \left\langle \frac{P_{N(x)}}{|a|}.\cos(\theta) - \frac{P'_{N(x)}}{|a|^2}.\cos(2.\theta) + ...(-1)^N.\frac{P^{(N)}_{N\ (x)}}{|a|^{N+1}}.\cos(N.\theta)\right\rangle.\sin(\beta.x)\right]$$

Exemple : $a = \alpha + \beta.I = 1 + 1.I$ donc $|a| = \sqrt{2}$; $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

$$\int x^2.e^{1.x}.\cos(1.x).dx = e^{1.x}.\left[\left\langle \frac{x^2}{\sqrt{2}}.\cos(\frac{\pi}{4}) - \frac{2.x}{\left(\sqrt{2}\right)^2}.\cos(2.\frac{\pi}{4}) + \frac{2}{\left(\sqrt{2}\right)^3}.\cos(3.\frac{\pi}{4})\right\rangle.\cos(1.x) + \left\langle \frac{x^2}{\sqrt{2}}.\sin(\frac{\pi}{4}) - \frac{2.x}{\left(\sqrt{2}\right)^2}.\sin(2.\frac{\pi}{4}) + \frac{2}{\left(\sqrt{2}\right)^3}.\sin(3.\frac{\pi}{4})\right\rangle.\sin(1.x)\right]$$

Remarque : Concernant le calcule $\cos(N.\theta)$ et $\sin(N.\theta)$ on trouve plusieurs méthode comme l'utilisations des principe des nombre complexe comme suite :

$$a^N = (\alpha + \beta.I)^N = |a|^N.e^{N.I.\theta} = |a|^N.[\cos(N.\theta) + I.\sin(N.\theta)]$$

Remarque : dans le cas au les intégrale des produit de **cos** et **sin** on utilise les relations trigonométrique

$\cos(a).\cos(b) = \dfrac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}$	$\sin(a).\sin(b) = \dfrac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$
$\cos(a).\sin(b) = \dfrac{\sin(a-b)+\sin(a+b)}{2}$	

- **Travail demandé aux étudiants :**
  Résoudre le reste des exercices par la méthode de variation de constant.