<u>chapitre 3 :</u> équation différentielle ordre N linéaire à coefficients constants :

$$A_N.\frac{d^N y}{dx^N}+A_{N-1}.\frac{d^{N-1}y}{dx^{N-1}}+.......+A_2.\frac{d^2 y}{dx^2}+A_1.\frac{dy}{dx}+A_0.y=f(\mathrm{x})$$; ($A_N, A_{N-1},...., A_1, A_0$ Sont des constants)

3.1: Recherche la solution Homogène $y_H = ? \rightarrow$ (Résoudre équation sans second membre E.S.S.M

$$A_N.\frac{d^N y}{dx^N}+A_{N-1}.\frac{d^{N-1}y}{dx^{N-1}}+.......+A_2.\frac{d^2 y}{dx^2}+A_1.\frac{dy}{dx}+A_0.y=0\ ).$$

On accepte sans démonstration les points suivant :

- La solution **de E.S.S.M** est sous forme exponentielle $y=\mathrm{e}^{(R.x)}$
- Equation **N^eme** ordre admet **N** solutions différant $y_1, y_2, y_3......................., y_N$
- Dans le cas au $\frac{y_K}{y_J}=C^{st}$ on prend $y_K = x.y_J$
- La solution Homogène y_H est une combinaison linéaire entre les N solutions $y_1, y_2,...., y_N$:

$$\boxed{y_H = C_1.y_1 + C_2.y_2 + ...+C_N.y_N}\ .$$

Pour Calculer les solutions $y_1, y_2,...., y_N$ on doit remplacer $y=\mathrm{e}^{(R.x)}$ dans **E.S.S.M** Tel que :

$$\begin{cases} y=\mathrm{e}^{(R.x)} \\ \frac{dy}{dx}=R.\mathrm{e}^{(R.x)} \\ \frac{d^2y}{dx^2}=R^2.\mathrm{e}^{(R.x)} \\ \\ \frac{d^Ny}{dx^N}=R^N.\mathrm{e}^{(R.x)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_0 * y = A_0 * \mathrm{e}^{(R.x)} \\ A_1 * \frac{dy}{dx} = A_1 * R.\mathrm{e}^{(R.x)} \\ A_2 * \frac{d^2y}{dx^2} = A_2 * R^2.\mathrm{e}^{(R.x)} \\ \\ A_N * \frac{d^Ny}{dx^N} = A_N * R^N.\mathrm{e}^{(R.x)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \textbf{E.S.S.M} \rightarrow \\ \mathrm{e}^{(R.x)} * \left[A_N.R^N + A_{N-1}.R^{N-1} + ... + A_1.R + A_0 \right] = 0 \\ \mathrm{e}^{(R.x)} \neq 0 \end{cases}$$

Equation caractéristique

$$A_N.R^N + A_{N-1}.R^{N-1} + ... + A_2.R^2 + A_1.R + A_0 = 0$$

Les solutions possibles de l'équation caractéristique soit réelle ou complexe, alors les solutions E.S.S.M

$y=\mathrm{e}^{R.x}$ $\quad y=\mathrm{e}^{\alpha.x}.\cos(\beta.x)$, $y=\mathrm{e}^{\alpha.x}.\sin(\beta.x)$ Ou bien des solution répéter

$y=x^m.\mathrm{e}^{R.x}$, $y=x^m.\mathrm{e}^{\alpha.x}.\cos(\beta.x)$, $y=x^m.\mathrm{e}^{\alpha.x}.\sin(\beta.x)$ Tel que **m** Nombre de répétition

3.2 : Recherche la solution Totale $y_T = ? \rightarrow$ (Résoudre équation Avec second membre E.A.S.M)

Pour calculer la solution Totale En utilisant deux méthodes

1^ere : Méthode de variation de constant : Dans cette méthode on prend la forme de y_T est la même forme y_H c'est-à-dire $y_T = C_1(\mathrm{x}).y_1 + C_2(\mathrm{x}).y_2 + ...+C_N(\mathrm{x}).y_N$, sauf que les constant sont des variable en fonction de x dont les dérivées sont déterminées par le système suivant :

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & . & . & y_N \\ y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & y_3^{(1)} & . & . & y_N^{(1)} \\ y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & y_3^{(2)} & . & . & y_N^{(2)} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ y_1^{(\mathrm{N-1})} & y_2^{(\mathrm{N-1})} & y_3^{(\mathrm{N-1})} & . & . & y_N^{(\mathrm{N-1})} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1' \\ C_2' \\ C_3' \\ \\ \\ C_N' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ \frac{F(x)}{A_N} \end{Bmatrix} \xrightarrow{\text{La Solution du Systeme}} \begin{cases} \frac{dC_1(\mathrm{x})}{dx} = \psi_1(x) \\ \frac{dC_2(\mathrm{x})}{dx} = \psi_2(x) \\ .... \\ \frac{dC_N(\mathrm{x})}{dx} = \psi_N(x) \end{cases}$$

$$\boxed{\Rightarrow \begin{cases} \int dC_1(\mathrm{x}) = C_1(\mathrm{x}) = \int \psi_1(x).dx + K_1 \\ \int dC_2(\mathrm{x}) = C_2(\mathrm{x}) = \int \psi_2(x).dx + K_2 \\ . \\ \int dC_N(\mathrm{x}) = C_N(\mathrm{x}) = \int \psi_N(x).dx + K_N \end{cases}}$$

2^{eme}: Méthode recherche solution particulaire y_P : Dans cette méthode on pose que la forme de **la Solution Totale = Solution Homogène + Solution particulaire** $\Rightarrow y_T = y_H + y_P$

La forme de y_P est obtenu à partir de la fonction F(x), on trouve 2 Cas principale :

- 1^{ere} cas : $\boxed{F(x) = P_{N1}(x).e^{S.x} = (P_0 + P_1 .x + P_2 .x^2 + ... + P_{N1}.x^{N1}).e^{S.x}}$; $P_{N1}(x)$: polynôme ordre N1.

  $\boxed{y_P = a_{N1}(x).e^{S.x}.x^m = (a_0 + a_1 .x + a_2 .x^2 + ... + a_{N1}.x^{N1}).e^{S.x}.x^m}$

  Tel que $a_0, a_1, a_2 .....\ a_{N1}$ Sont des constant calculer par l'identification avec la fonction F(x).

- 2^{eme} cas : $\boxed{F(x) = e^{S.x}.(P_{N1}(x).\cos(\gamma.x) + Q_{N2}(x).Sin(\gamma.x))}$

  $P_{N1}(x)$: polynôme ordre N1 et $Q_{N2}(x)$: polynôme ordre N2

  $\boxed{y_P = e^{S.x}.(a_{N3}(x).\cos(\gamma.x) + b_{N3}(x).Sin(\gamma.x)).x^m}$

  N3: le degré de polynôme $a_{N3}(x)$ et $b_{N3}(x)$ Tel que N3=**MAX**(N1,N2)

  et le terme x^m est introduit pour **éviter** la répétition des solutions y_1, y_2 , ..., y_N de E.S.S.M dans la solution $y_P = e^{S.x}$ ou $y_P = e^{S.x}.\cos(\gamma.x)$ ou $y_P = e^{S.x}.\sin(\gamma.x)$

  m désigne combien des solutions de E.S.S.M répété dans *la solution particulaire* y_P.

TD 03 : équation différentielles ordre N

exercice 1

$$\boxed{\frac{d^3y}{dx^3} + 3.\frac{d^2y}{dx^2} + 3.\frac{dy}{dx} + y = e\,\mathrm{xp}(-x)}$$

E.S.S.M : Recherche la solution homogène:

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 3.\frac{d^2y}{dx^2} + 3.\frac{dy}{dx} + y = 0$$

Équation caractéristique $r^3 + 3.r^2 + 3.r + 1 = 0$ Par test on remarque que $r_1 = -1$ on fait la division **euclidienne** on trouve

$$\boxed{\frac{r^3 + 3.r^2 + 3.r + 1}{r + 1} = r^2 + 2.r + 1}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} r^2 + 2.r + 1 = 0 \\ \Delta = b^2 - 4.a.c = 2^2 - 4.1.1 = 0 \\ r_2 = r_3 = \dfrac{-b}{2.a} = -1 \end{array}}$$

$$\begin{cases} y_1 = e^{-x} \\ y_2 = x.e^{-x} \\ y_3 = x^2.e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_H(x) = C_1.y_1 + C_2.y_2 + C_3.y_3 \\ y_H(x) = (C_1 + C_2.x + C_3.x^2).e^{-x} \end{cases}$$

1^{ere} Méthode recherche solution particulaire

$y_P = ? \rightarrow f(x) = 1.e^{-x} = P_n(x).e^{S.x}$ Tel que $P_n(x)$ c'est un polynôme ordre 0 $\Rightarrow y_P = a_0.e^{-x}.x^m$

on a : $S = -1 = r_{1,2,3} \rightarrow$ Donc Trois solution sont égaux alors **m=3** $\Rightarrow y_P = a_0.e^{-x}.x^3$

Pour calculer a0 on remplace yp dans **E.A.S.M** Tel que :

$\boxed{\frac{dy_P}{dx} = a_0.e^{-x}.(-.x^3 + 3..x^2)}$; $\boxed{\frac{d^2y_P}{dx^2} = a_0.e^{-x}.(x^3 - 6..x^2 + 6..x)}$; $\boxed{\frac{d^3y_P}{dx^3} = a_0.e^{-x}(-x^3 + 9..x^2 - 18..x + 6)}$

E.A.S.M : $\frac{d^3y_P}{dx^3} + 3.\frac{d^2y_P}{dx^2} + 3.\frac{dy_P}{dx} + y_P = e^{-x}$.

$\rightarrow 6.a0 = 1.e^{-x}. \rightarrow a0 = \frac{1}{6}$ donc $\boxed{y_T = y_H + y_P = (C_1 + C_2.x + C_3.x^2 + \frac{1}{6}.x^3).e^{-x}}$

2^{eme} méthode variation des constatant

$y_T(x) = (C_1(x) + C_2(x).x + C_3(x).x^2).e^{-x}$

On a : $\begin{cases} y_1 = e^{-x} \\ y_2 = x.e^{-x} \\ y_3 = x^2.e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1' = -e^{-x} \\ y_2' = (1-x).e^{-x} \\ y_3' = (2.x - x^2).e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1'' = e^{-x} \\ y_2'' = (-2+x).e^{-x} \\ y_3'' = (2-4.x+x^2).e^{-x} \end{cases}$

On construire système de dérive des constatant

$$\begin{cases} y_1.C_1' + y_2.C_2' + y_3.C_3' = 0 \\ y_1'.C_1' + y_2'.C_2' + y_3'.C_3' = 0 \\ y_1''.C_1' + y_2''.C_2' + y_3''.C_3' = F(x)/\mathrm{a}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{-x}.\left(C_1' + x.C_2' + x^2.C_3'\right) = 0 \\ e^{-x}.\left(-C_1' + (1-x).C_2' + (2.x-x^2).C_3'\right) = 0 \\ e^{-x}\left(C_1' + (-2+x).C_2' + (2-4.x+x^2).C_3'\right) = e^{-x} \end{cases}$$

Tel que (a_3) est le coefficient de la troisième dérive.

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1' + x.C_2' + x^2.C_3' = 0 \\ -C_1' + (1-x).C_2' + (2.x-x^2).C_3' = 0 \\ C_1' + (-2+x).C_2' + (2-4.x+x^2).C_3' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dC_1}{dx} = \dfrac{1}{2}.x^2 \\ \dfrac{dC_2}{dx} = -x \\ \dfrac{dC_3}{dx} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{6}.x^3 + K_1 \\ C_2 = -\dfrac{1}{2}x^2 + K_2 \\ C_3 = \dfrac{1}{2}.x + K_3 \end{cases}$$

$$y_T(x) = \left((\frac{1}{6}.x^3 + K_1) \;+\; (-\frac{1}{2}x^2 + K_2).x \;+\; (\frac{1}{2}.x + K_3).x^2) \right).e^{-x}$$

$$y_T(x) = \left(K_1 + K_2.x + K_3.x^2\right).e^{-x} + \frac{1}{6}.x^3.e^{-x} = y_H + y_P$$

Exercice 2

$$\frac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{dx}^4} + 2.\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{dx}^2} + y = \sin(x)$$

E.S.S.M : Recherche la solution homogène :

$$\frac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{dx}^4} + 2.\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{dx}^2} + y = 0$$

équation caractéristique : $r^4 + 2.r^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow (r^2+1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = -1 = I^2 \\ r^2 = -1 = I^2 \end{cases}$

Donc on a des Solutions complexe double : $\begin{cases} r_{1,2} = 0 \pm I = \alpha \pm \beta.I \\ r_{3,4} = 0 \pm I = \alpha \pm \beta.I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{\alpha.x}.\cos(\beta.x) = \cos(x) \\ y_2 = e^{\alpha.x}.\sin(\beta.x) = \sin(x) \\ y_3 = x.e^{\alpha.x}.\cos(\beta.x) = x.\cos(x) \\ y_4 = x.e^{\alpha.x}.\cos(\beta.x) = x.\sin(x) \end{cases}$

$y_H(x) = C_1.y_1 + C_2.y_2 + C_3.y_3 + C_4.y_4 \quad \rightarrow y_H(x) = (C_1 + C_3.x).\cos(x) + (C_2 + C_4.x).\sin(x)$

Recherche Solution particulaire $y_P = ? \rightarrow f(x) = \sin(x)$

$f(x) = e^{0.x}.(0.\cos(x) + 1.\sin(x)) \quad \rightarrow \quad f(x) = e^{S.x}.(P_{N1}(x).\cos(\gamma.x) + Q_{N2}(x).\sin(\gamma.x))$

N1=0 et N2=0 => N3 = **MAX**(N1,N2) = 0

$y_P(x) = e^{0.x}.(a_0.\cos(x) + b_0.\sin(x)).x^m$

$S + \gamma.I = 0 + I = r_1 \; et \; r_3$ (Deux solution répétée) $\Rightarrow m = 2 \quad \rightarrow \; y_P(x) = a_0.x^2.\cos(x) + b_0.x^2.\sin(x))$

Solution totale

$y_T = y_H + y_P \quad \rightarrow \quad \boxed{y_T(x) = (C_1 + C_3.x + a_0.x^2).\cos(x) \;+\; (C_2 + C_4.x + b_0.x^2).\sin(x)}$

Exercice 3 : $\boxed{\dfrac{d^4y}{dx^4}+6.\dfrac{d^2y}{dx^2}+25.y = x.e^x.\cos(2.x) \ + \ e^x.\sin(5.x)}$

$\dfrac{d^4y}{dx^4}+6.\dfrac{d^2y}{dx^2}+25.y=0$ **Équation caractéristique** $r^4+6.r^2+25=0$; On pose $r^2=Z \rightarrow r^4=Z^2$

E.C : $Z^2+6.Z+25=0$; on calcule $\Delta = b^2-4.a.c = 6^2-4.1.25=-64=I^2.64$

$$\begin{cases} Z_1 = \dfrac{-6-8.I}{2} = -3-4.I = R^2 = (\alpha_1+I.\beta_1)^2 = \alpha_1^2-\beta_1^2+2.\alpha_1.\beta_1.I \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ Z_2 = \dfrac{-6+8.I}{2} = -3+4.I = R^2 = (\alpha_2+I.\beta_2)^2 = \alpha_2^2-\beta_2^2+2.\alpha_2.\beta_2.I \ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

(1) :	$-3-4.I = \alpha_1^2-\beta_1^2+2.\alpha_1.\beta_1.I$ $\begin{cases} \alpha_1^2-\beta_1^2=-3 \\ 2.\alpha_1.\beta_1=-4 \\ \alpha_1^2+\beta_1^2=5 \end{cases}$	$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \pm 1 \\ \beta_1 = -\dfrac{2}{\alpha_1} = \mp 2 \end{cases} \Rightarrow R^2=(1-2.I)^2$
(2) :	$-3+4.I = \alpha_2^2-\beta_2^2+2.\alpha_2.\beta_2.I$ $\begin{cases} \alpha_2^2-\beta_2^2=-3 \\ 2.\alpha_2.\beta_2=+4 \\ \alpha_2^2+\beta_2^2=5 \end{cases}$	$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = \pm 1 \\ \beta_2 = -\dfrac{2}{\alpha_2} = \pm 2 \end{cases} \Rightarrow R^2=(1+2.I)^2$

$$\begin{cases} R_1 = -(1-2.I) \\ R_2 = +(1-2.I) \\ R_3 = -(1+2.I) \\ R_4 = +(1+2.I) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_{1,\ 3} = -1 \pm 2.I \\ R_{2,\ 4} = +1 \pm 2.I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \exp(-x).\cos(2.x) \\ y_3 = \exp(-x).\sin(2.x) \\ y_2 = \exp(+x).\cos(2.x) \\ y_4 = \exp(+x).\sin(2.x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \{ y_H(x) = C_1.y_1 + C_2.y_2 + C_3.y_3 + C_4.y_4$$

$$\boxed{y_H(x) = \exp(-x).\big(C_1.\cos(2.x)+C_3.\sin(2.x)\big) + \exp(+x).\big(C_2.\cos(2.x)+C_4.\sin(2.x)\big)}$$

Recherche Solution particulaire :

$y_P = ? \rightarrow f(x) = x^2.e^x.\cos(2.x) \ + \ e^x.\sin(5.x) = F1(x)+F2(x)$; Donc $y_P = yp1 + yp2$

$F1(x) = x^2.e^x.\cos(2.x) = e^x.(x^2.\cos(2.x)+0.Sin(2.x)) = e^{S.x}.(P_{N1}(x).\cos(\gamma.x)+Q_{N2}(x).\sin(\gamma.x))$

$\rightarrow \quad yp_1 = e^{S.x}.(a_{N3}(x).\cos(\gamma.x)+b_{N3}(x).\sin(\gamma.x)).x^m$

N1=2 et N2=0 => N3 = **MAX** (N1, N2) = 2

$S+\gamma.I = 1+2.I = R4$ (Une solution répetée) $\rightarrow m=1$

$\rightarrow \quad yp_1 = e^x.((a_0+a_1.x+a_2.x^2).\cos(\gamma.x)+(b_0+b_1.x+b_2.x^2).\sin(\gamma.x)).x$

$$\boxed{\rightarrow \quad yp_1 = e^x.((a_0.x+a_1.x^2+a_2.x^3).\cos(2.x)+(b_0.x+b_1.x^2+b_2.x^3).\sin(2.x))}$$

$F2(x) = e^x.\sin(5.x) = e^x.(0.\cos(5.x)+1.Sin(5.x)) = e^{S.x}.(P_{N1}(x).\cos(\gamma.x)+Q_{N2}(x).\sin(\gamma.x))$

$\rightarrow \quad yp_2 = e^{S.x}.(d_{N3}(x).\cos(\gamma.x)+E_{N3}(x).\sin(\gamma.x)).x^m$

N1=0 et N2=0 => N3 = **MAX** (N1, N2) = 0

$S+\gamma.I = 1+5.I \neq R_{1,2,3,4}$ (Aucune solution répetée) $\rightarrow m=0$

$$\boxed{\rightarrow \quad yp_2 = e^x.(d_0.\cos(5.x)+E_0.\sin(5.x))}$$

La solution totale est : $y_T = y_H + y_{P1} + y_{P2}$