Chapitre 4 : Transformation de Laplace

Soit f(t) une fonction défini sur l'intervalle $t \in [0,+\infty[$. On appelle TL(f(t)) l'intégrale de Laplace ou Transformation de Laplace Tel que

$$\boxed{TL(f(t)) = \int_0^{\infty} f(t)*\exp(-P.t).dt = F(P)}$$

On Note : $f(t) \underset{TL^{-1}}{\overset{TL}{\rightleftarrows}} F(p)$

Avec la transformation inverse de Laplace

$$\boxed{TL^{-1}(F(p)) = f(t)}$$

Exercice 1 :

En utilisant la transformation de Laplace :

$\boxed{TL(f(t)) = \int_0^{\infty} f(t)*\exp(-P.t).dt = F(P)}$ déduire :

- $f(t) = a = C^{st} \quad \rightarrow \quad \boxed{TL(a) = \dfrac{a}{P}}$
- $f(t) = \exp(a.t) \quad \rightarrow \quad \boxed{TL(\exp(a.t)) = \dfrac{1}{P-a}}$

On pose $a = \alpha + \beta.I$ déduire TL

- $f(t) = \exp(\alpha.t).\cos(\beta.t) \quad \rightarrow$

$$\boxed{TL(\exp(\alpha.t)*\cos(\beta.t)) = \frac{P-\alpha}{(P-\alpha)^2+\beta^2}}$$

- $f(t) = \exp(\alpha.t).\sin(\beta.t) \quad \rightarrow$

$$\boxed{TL(\exp(\alpha.t)*\sin(\beta.t)) = \frac{\beta}{(P-\alpha)^2+\beta^2}}$$

-
- $\boxed{TL(\cos(\beta.t)) = \dfrac{P}{P^2+\beta^2}}$
- $\boxed{TL(\sin(\beta.t)) = \dfrac{\beta}{P^2+\beta^2}}$

Exercice 2 :

- En utilisant Théorème dérivation de l'image

$$\boxed{TL\left(t^N.f(t)\right) = (-1)^N.\frac{d^N}{dP^N}\left[TL(f(t))\right]}$$

déduire :

$$\boxed{TL\left[t.\cos(B.t)\right] = \frac{P^2-B^2}{\left(P^2+B^2\right)^2}}$$

$$\boxed{TL\left[t.\sin(\alpha.t)\right] = \frac{2.P.B}{\left(P^2+B^2\right)^2}}$$

- on a $TL(1) = \dfrac{1}{P}$

déduire $\boxed{TL(t*1) = \dfrac{1}{P^2}}$, $\boxed{TL(t^2*1) = \dfrac{2}{P^3}}$,

$\boxed{TL(t^3*1) = \dfrac{2*3}{P^4}}$, $\boxed{TL(t^N*1) = \dfrac{N!}{P^{N+1}}}$

- En utilisant théorème de translation :

$$\boxed{TL\left[e^{a.t}*f(t)\right] = \int_0^{\infty} e^{a.t}*f(t)*e^{-P.t}.dt = F(P-a)}$$

déduire:

$$\boxed{TL\left[t*\exp(\alpha.t).\cos(\beta.t)\right] = \frac{(P-\alpha)^2-B^2}{\left((P-\alpha)^2+B^2\right)^2}}$$

$$\boxed{TL\left[t*\exp(\alpha.t).\sin(\beta.t)\right] = \frac{2.(P-\alpha).B}{\left((P-\alpha)^2+B^2\right)^2}}$$

$$\boxed{TL\left(t^N.e^{a.t}\right) = \frac{N!}{(P-a)^{N+1}}}$$

Exercice 3 :

Trouvez la transformation inverse de Laplace des fonctions suivant :

$$y(t) = TL^{-1}\left(\frac{2.P^2-7.P+1}{P^3-5.P^2+6.P}\right)$$

$$\rightarrow \quad y(t) = TL^{-1}\left(\frac{2.P^2-7.P+1}{P.(P-2).(P-3)}\right)$$

On fait la décomposition de la fraction rationnelle

on trouve : $\boxed{y(t) = TL^{-1}\left(\dfrac{A}{P}+\dfrac{B}{P-2}+\dfrac{C}{P-3}\right)}$

$$y(t) = TL^{-1}\left(\frac{(A+B+C).P^2+(-5.A-3.B-2.C).P+6.A}{P.(P-2).(P-3)}\right)$$

Par identification :

$$\begin{cases} A+B+C=2 \\ -5.A-3.B-2.C=-7 \\ 6.A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/6 \\ B = 5/2 \\ C = -2/3 \end{cases}$$

En utilisant le transformé inverse :

$$\boxed{y(t) = TL^{-1}\left(\frac{A}{P}\right)+TL^{-1}\left(\frac{B}{P-2}\right)+TL^{-1}\left(\frac{C}{P-3}\right)}$$

$$\boxed{y(t) = A+B.e^{2.t}+C.e^{3.t} \rightarrow y(t) = \frac{1}{6}+\frac{5}{2}.e^{2.t}-\frac{2}{3}.e^{3.t}}$$

- **Trouvez la transformation inverse de TL**

$$y(t) = TL^{-1}\left(\frac{-2P^2-13P-20}{(P+3)^3}\right)$$

$$y(t) = TL^{-1}\left(\frac{A.(P+3)^2+B.(P+3)+C}{(P+3)^3}\right)$$

$$\boxed{y(t) = TL^{-1}\left(\frac{A}{(P+3)}+\frac{B}{(P+3)^2}+\frac{C}{(P+3)^3}\right)}$$

$$\rightarrow \quad TL(y(t)) = \frac{A.P^2+(6.A).P+9.A+3.B+C}{(P+3)^3}$$

Par identification :

$$\begin{cases} A=-2 \\ 6.A+B=-13 \\ 9.A+3.B+C=-20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-2 \\ B=-1 \\ C=1 \end{cases}$$

En utilisant le transformé inverse :

$$\boxed{y(t)=TL^{-1}\left(\frac{A}{(P+3)}\right)+TL^{-1}\left(\frac{B}{(P+3)^2}\right)+TL^{-1}\left(\frac{C}{(P+3)^3}\right)}$$

on a $\boxed{TL\left(t^N.e^{a.t}\right)=\frac{N!}{(P-a)^{N+1}}}$ donc

$$\boxed{y(t)=A.e^{-3.t}+B.t.e^{-3.t}+C.\frac{t^2}{2!}.e^{-3}}$$

$$\rightarrow\ y(t)=\left(-2-t.e^{-3.t}+\frac{t^2}{2}\right).e^{-3t}$$

Exercice 4 : En basant sur la loi principale de TL:

$$\boxed{TL(f(t))=\int_0^{\infty} f(t)*\exp(-P.t).dt=F(P)}$$

On déduire :

$$\boxed{TL\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)=P.TL\left(y(t)\right)-y(0)}$$

$$:\ \boxed{TL\left(\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right)=P^2.TL\left(y(t)\right)-P.y(0)-y'(0)}$$

$$\boxed{TL\left(\frac{d^3y(t)}{dt^3}\right)=P^3.TL\left(y(t)\right)-P^2.y(0)-P.y'(0)-y''(0)}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} TL\left(\frac{d^N y(t)}{dt^N}\right)=P^N.TL(y(t))-P^{N-1}.y(0)- \\ P^{N-2}.\frac{d\ y(0)}{dt}-P^{N-3}.\frac{d^2y(0)}{dt^2}-P^{N-4}.\frac{d^3y(0)}{dt^3}- \\ \qquad ....-P^0.\frac{d^{N-1}y(0)}{dt^{N-1}} \end{array}}$$

- En utilisant TL Résoudre l'équation différentielle :

$$\boxed{\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2.\frac{dy(t)}{dt}+5.y(t)=t*\exp(t)}$$

Avec les conditions initiales suivant :

$$y_{(0)}=1 \quad \text{et} \quad y'_{(0)}=4$$

On introduire l'opérateur de Laplace :

$$TL\left(\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2.\frac{dy(t)}{dt}+5.y(t)=t*\exp(t)\right)$$

$$TL\left(\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right)+2.TL\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)+5.TL\left(y(t)\right)=\left(t.e^t\right)$$

$$\boxed{(P^2+2.P+5).TL\left(y(t)\right)-P.y(0)-y'(0)-2.y(0)=\frac{1}{(P-1)^2}}$$

$$TL\left(y(t)\right)=\frac{P^3+8.P^2+13.P+7}{(P-1)^2.(P^2+2.P+5)}=\frac{P^3+8.P^2+13.P+7}{(P-1)^2.\left((P+1)^2+2^2\right)}$$

$$TL\left(y(t)\right)=\frac{A.(P-1)+b}{(P-1)^2}+\frac{C.(P-\alpha)+\beta.D}{(P-\alpha)^2+\beta^2}$$

$$\boxed{TL\left(y(t)\right)=\frac{A}{(P-1)}+\frac{B}{(P-1)^2}+\frac{C.(P-\alpha)}{(P-\alpha)^2+\beta^2}+\frac{\beta.D}{(P-\alpha)^2+\beta^2}}$$

$$\boxed{\alpha=-1}\ ;\ \boxed{\beta=2}$$

En utilisant le transformé inverse :

$$\boxed{\begin{array}{l} y(t)=TL^{-1}\left(\frac{A}{(P-1)}\right)+TL^{-1}\left(\frac{B}{(P-1)^2}\right)+ \\ TL^{-1}\left(\frac{C.(P+1)}{(P+1)^2+2^2}\right)+\ TL^{-1}\left(\frac{2.D}{(P+1)^2+2^2}\right) \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y(t)=A.e^t+B.t.e^t+C.e^{-t}.\cos(2.t)+ \\ \qquad D.e^{-t}.\sin(2.t) \end{array}}$$

Exercice 5 :

Trouvez la transformation inverse de Laplace des fonctions suivant :

$$\boxed{y(t)=TL^{-1}\left[\frac{8.P^3-11.P^2+5.P+7}{P.(P^3+27)}\right]}$$

On donne :

$$P.(P^3+27)=P.(P+3).\left(P^2-3.P+9\right)$$

$$\Delta=3^2-4.1.9=-27=27.I^2$$

$$P_{1,2}=\frac{3}{2}\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}.I \quad = \quad \alpha\pm\beta.I$$

$$\boxed{\alpha=\frac{3}{2}}\ ;\ \boxed{\beta=\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

$$\boxed{y(t)=TL^{-1}\left(\frac{8.P^3-11.P^2+5.P+7}{P.(P+3).\left((P-\alpha)^2+\beta^2\right)}\right)}$$

$$y(t)=TL^{-1}\left(\frac{A}{P}\right)+TL^{-1}\left(\frac{b}{P+3}\right)+TL^{-1}\left(\frac{C.(P-\alpha)+\beta.D}{(P-\alpha)^2+\beta^2}\right)$$

$$y(t)=TL^{-1}\left(\frac{A}{P}\right)+TL^{-1}\left(\frac{b}{P+3}\right)+C.TL^{-1}\left(\frac{C.(P-\alpha)}{(P-\alpha)^2+\beta^2}\right)+$$

$$D.TL^{-1}\left(\frac{\beta}{(P-\alpha)^2+\beta^2}\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y(t)=A+b.e^{-3.t}+C.e^{\frac{3}{2}.t}.\cos(\frac{3\sqrt{3}}{2}.t)+ \\ \qquad D.e^{\frac{3}{2}.t}.Sin(\frac{3\sqrt{3}}{2}.t) \end{array}}$$