Chapitre 5 Série de Fourier

Soit f(x) une fonction périodique défini sur une période $x \in [-L, L]$ (la période égale (2.L))

On peut exprimer f(x) sous forme série trigonométrique (Série Fourier) comme suit :

$$\boxed{f(x) = S(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{N=1}^{\infty}\left[A_N.\cos(N.\frac{\pi}{L}.x) + B_N.\sin(N.\frac{\pi}{L}.x)\right]}$$

Tel que la période =2.L

$$\boxed{A_0 = \frac{1}{L}.\int_{-L}^{L} f(x).dx}$$

$$\boxed{A_N = \frac{1}{L}.\int_{-L}^{L} f(x).\cos(N.\frac{\pi}{L}.x).dx}$$

$$\boxed{B_N = \frac{1}{L}.\int_{-L}^{L} f(x).\sin(N.\frac{\pi}{L}.x).dx}$$

<u>Remarque :</u> Soit G(x) fonction :

- G(x) est paire : $G(-x) = G(x) \Rightarrow$

$\int_{-L}^{L} G(x).dx = 2.\int_{0}^{L} G(x).dx$

- G(x) est impaire : $G(-x) = -G(x) \Rightarrow$

$\int_{-L}^{L} G(x).dx = 0$

- $\cos(N.\frac{\pi}{L}.x)$ est paire et $\sin(N.\frac{\pi}{L}.x)$ est impaire
- fonction périodique: F(x)=F(x+2L)
- dans le point de discontinuité x=c la série de

Fourier est calculer par : $S(C) = \frac{F(C^-) + F(C^+)}{2}$

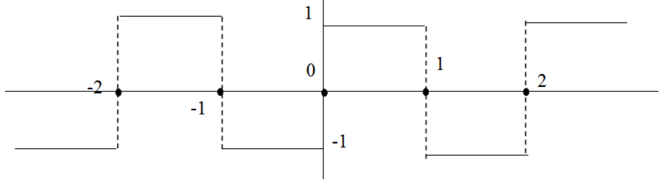
- **Théorème de Parsevale** :

$$\boxed{\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}(f(x))^2.\mathrm{dx} = \frac{A_0^2}{2} + \sum_{1}^{\infty}\left[A_N^{\ 2} + B_N^{\ 2}\right]}$$

Exemple 1:

- tracer dans trois périodes la fonction f (x) ?
- développer en séries de Fourier :
- calculer la sérier dans les point de discontinuité

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} -1 & x \in [-1, 0] \\ +1 & x \in [0, 1] \end{cases}}$$



F(x) : c'une fonction périodique de période (2.L=2) donc L=1

La fonction f(x) est impaire Donc

$$\boxed{A_0 = \frac{1}{L}.\int_{-L}^{L} f(x) = \frac{1}{1}.\int_{-1}^{1}\underbrace{f(x)}_{impaire} = 0}$$ et

$$\boxed{A_N = \frac{1}{L}.\int_{-L}^{L}\underbrace{f(x).\cos(N.\frac{\pi}{L}.x)}_{impaire}.dx = 0}$$

$$B_N = \frac{1}{L}.\int_{-L}^{L}\underbrace{f(x).\sin(N.\frac{\pi}{L}.x)}_{paire}.dx = \frac{2}{1}.\int_{0}^{1} 1.\sin(N.\pi.x).dx$$

$$B_N = \frac{-2}{N.\pi}\cos(N.\pi.x)\Big|_0^1 = \frac{-2}{N.\pi}\left[(-1)^N - 1\right]$$

$$\boxed{\Rightarrow B_N = \begin{cases} 0 & \rightarrow \quad N = 2.K \\ \dfrac{4}{\Pi(2*K+1)} & \rightarrow \quad N = 2.K+1 \end{cases}}$$

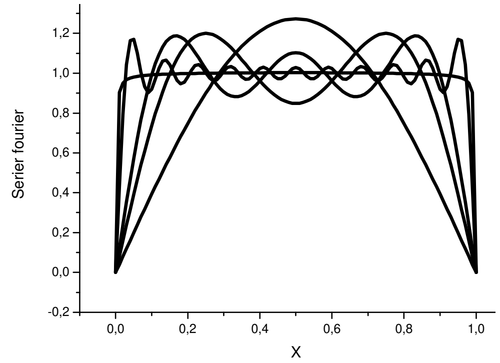
$$f(x) = \frac{4}{\pi}.\sum_{K=0}^{N\inf}\left[\frac{1}{2.k+1}.\sin((2.k+1).\pi.x)\right]$$

Calculer la sérier dans les point de discontinuité:

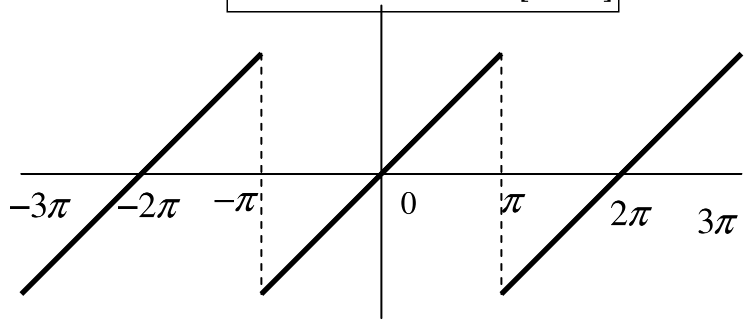
$$S(-1) = \frac{F(-1^-) + F(-1^+)}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$$

$$S(0) = \frac{F(0^-) + F(0^+)}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0$$

$$S(1) = \frac{F(1^-) + F(1^+)}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$$



Exemple 2: $\boxed{F(x) = x \quad ; \ x \in [-\pi, \pi]}$



$$f(x) = S(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{1}^{\infty}\left[A_N.\cos(N.\frac{\pi}{L}.x) + B_N.\sin(N.\frac{\pi}{L}.x)\right]$$

F(x) : c'une fonction périodique de période ($2.L = 2.\pi$)

donc $L = \pi$

la fonction f(x) est impaire Donc:

$$\boxed{A_0 = \frac{1}{L}.\int_{-L}^{L} f(x) = \frac{1}{1}.\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(x)}_{impaire} = 0}$$

$$\boxed{A_n = \frac{1}{L}.\int_{-L}^{L} \underbrace{f(x).\cos(n.\frac{\pi}{L}.x)}_{impaire}.dx = 0}$$

$$B_n = \frac{1}{L}.\int_{-L}^{L} \underbrace{f(x).\sin(n.\frac{\pi}{L}.x)}_{paire}.dx = \frac{2}{\pi}.\int_{0}^{\pi} x.\sin(n.x).dx$$

Intégrale par partie

$$\int_{0}^{\pi} x.\mathrm{Sin}(n.x).dx = \int U.dV = U.V - \int V.dU$$

$$U = x \qquad \rightarrow dU = dx$$

$$dV = \frac{n}{n}.\sin(n.x).dx \rightarrow V = \frac{-1}{n}Cos(n.x)$$

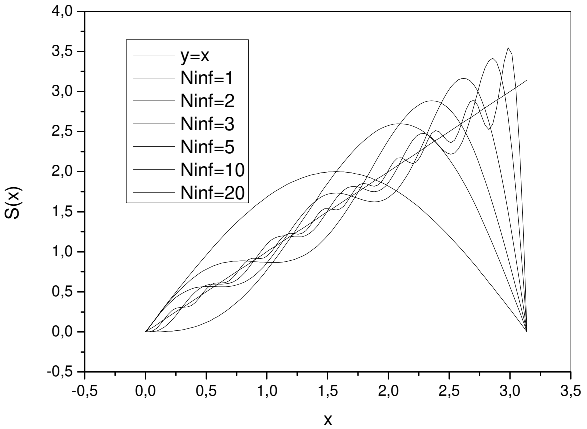
$$\int x.\mathrm{Sin}(n.x).dx = \frac{-x}{n}.Cos(n.x)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{-1}{n}.\mathrm{Cos}(n.x).dx$$

$$\int_{0}^{\pi} x.\mathrm{Sin}(n.x).dx = \frac{-x}{n}.Cos(n.x)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n^2}.Sin(n.x)\Big|_0^{\pi}$$

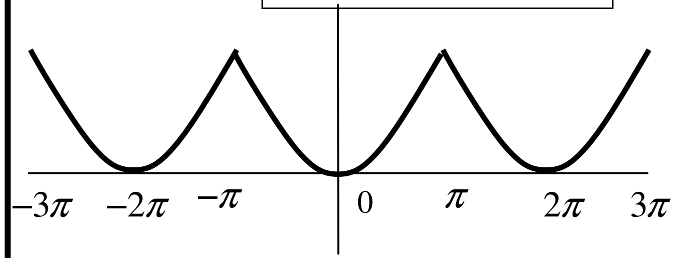
$$\int_{0}^{\pi} x.\mathrm{Sin}(n.x).dx = -\frac{\pi}{n}(-1)^n$$

$$\boxed{B_n = \frac{2}{\pi}.\int_0^{\pi} x.\sin(n.x).dx = \frac{-2}{n}\left(-1\right)^n}$$

$$\boxed{S\left(x\right) = \sum_{1}^{\infty} B_K.\sin(n.\frac{\pi}{L}.x) = -2.\sum_{1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{n}.\sin(n.x)}$$



Exemple 3: $\boxed{F(x) = x^2 \quad ; \; x \in \left[-\pi, \pi\right]}$



F(x) : c'une fonction périodique de période $(2.L = 2.\pi)$ donc $L = \pi$

La fonction f(x) est paire Donc:

$$\boxed{B_N = \frac{1}{L}.\int_{-L}^{L} \underbrace{f(x).\sin(N\frac{\pi}{L}.x)}_{impaire}.dx = 0}$$

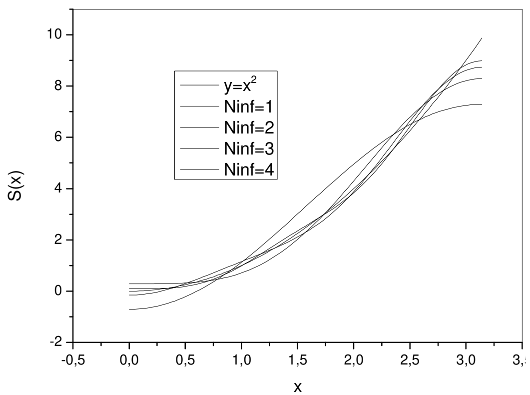
$$\boxed{A_0 = \frac{1}{L}.\int_{-L}^{L} f(x) = \frac{1}{\pi}.\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x^2}_{paire} = \frac{2.\pi^2}{3}}$$

$$A_N = \frac{1}{L}.\int_{-L}^{L} \underbrace{f(x).\cos(N.\frac{\pi}{L}.x)}_{paire}.dx =$$

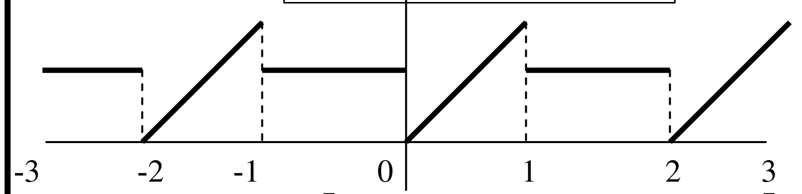
$$\boxed{A_N = \frac{2}{\pi}.\int_0^{\pi} x^2.\cos(N.x).dx = \frac{4}{N^2}(-1)^N}$$

(Faire 2 fois l'intégrale par partie)

$$\boxed{f(x) = S\left(x\right) = \frac{\pi^2}{3} + 4.\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^N}{N^2}.\cos(N.x)}$$



Exemple4: $\boxed{F(x) = \begin{cases} 1/2 & ; \; x \in \left[-1, 0\right] \\ x & ; \; x \in \left[0, 1\right] \end{cases}}$



$$f(x) = S\left(x\right) = \frac{A_0}{2} + \sum_{1}^{\infty}\left[A_N.\cos(N.\frac{\pi}{L}.x) + B_N.\sin(N.\frac{\pi}{L}.x)\right]$$

F(x) : c'une fonction périodique de période (2.L=2)

$$\boxed{A_0 = \frac{1}{L}.\int_{-L}^{L} f(x).dx = \int_{-1}^{1} f(x).\mathrm{dx}. = \int_{-1}^{0}\frac{1}{2}.dx + \int_0^1 x.dx = 1}$$

$$A_N = \frac{1}{L}.\int_{-L}^{L} f(x).\cos(N.\frac{\pi}{L}.x).dx =$$

$$A_N = \int_{-1}^{0}\frac{1}{2}.\cos(N.\pi.x).dx + \int_0^1 x.\cos(N.\pi.x).dx$$

$$\boxed{A_N = \frac{1}{N^2.\pi^2}\left[\left(-1\right)^N - 1\right]}$$

$$B_N = \frac{1}{L}.\int_{-L}^{L} f(x).\sin(N.\frac{\pi}{L}.x)dx =$$

$$B_N = \int_{-1}^{0}\frac{1}{2}.\sin(N.\pi.x).dx + \int_0^1 x.\sin(N.\pi.x).dx$$

$$\boxed{B_N = \frac{-1}{2.N.\pi}\left[(-1)^N + 1\right]}$$

$$\boxed{f(x) = S\left(x\right) = \frac{1}{2} + \sum_{1}^{\infty}\left[\frac{1}{N^2.\pi^2}\left[\left(-1\right)^N - 1\right].\cos(N.\pi.x) - \frac{1}{2.N.\pi}\left[(-1)^N + 1\right].\sin(N.\pi.x)\right]}$$

$$S\left(C\right) = \left(F(C^-) + F(C^+)\right)/2$$

$$S(-1) = \frac{1 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4} \; ; \quad S(0) = \frac{\frac{1}{2} + 0}{2} = \frac{1}{4} ; \; S(1) = \frac{\frac{1}{2} + 1}{2} = \frac{3}{4}$$