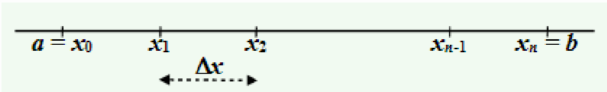
3.5. Intégrale définie

3.5.1. Intégrale définie en tant que limite de somme de Riemann

Soit une fonction définie sur un intervalle fermé $[a,b]$. Découpons cet intervalle en un nombre fini de sous-intervalle $I_i = [x_{i-1}, x_i]$. Pour la simplicité, nous les prendrons de largeur égale $\Delta x = \frac{b-a}{n}$:



L'intervalle $[a,b]$ et les sous-intervalles $[x_{i-1}, x_i]$

Dans chacun des sous-intervalles, choisissons un point arbitraire x_i^*.

La somme $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$ est la somme de Riemann.

Définition1. Si, quand n tend vers l'infini, les sommes de Riemann tendent vers une limite qui ne dépends pas des points x_i^* choisis, on dit la fonction est intégrable sur l'intervalle $[a,b]$ et on écrit :

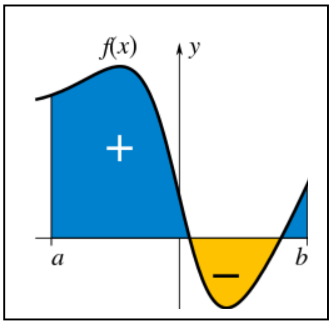
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

$\int_a^b f(x)dx$ s'appelle l'intégrale de f sur l'intervalle $[a,b]$ et a et b sont les bornes inférieur et supérieur de l'intégrale.

Théorème1. Si la fonction f est continue sur l'intervalle $[a,b]$, alors $\int_a^b f(x)dx$ existe.

Remarque1. $\int_a^b f(x)dx$ est un nombre bien précis. On dit de l'intégrale qu'il s'agit d'une **intégrale définie.**

Remarque 2. Pour une fonction positive sur l'intervalle $[a,b]$, $\int_a^b f(x)dx$ représente l'aire de la figure délimitée par l'axe des x, le graphe de la fonction et les droites verticale des $x = a$ et $x = b$. Si la fonction n'est pas positive, alors l'intégrale représente une aire algébrique : il faut compter les aires au-dessus de l'axe des x positivement et les aires sous l'axe des x négativement, comme dans la figure.



- **Propriétés de l'intégrale définie**

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$; $\int_a^a f(x)dx = 0$, **2.** $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$

3. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_b^a f(x)dx$. **4.** $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

5. $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

Exemple. Soit f la fonction dont le graphe, figure 1, est formé de segments de droites.

Calculez $\int_2^6 f(x)dx$

La fonction $f(x)$ est continue sur l'intervalle [2,6], alors $\int_2^6 f(x)dx$ existe.

La fonction $f(x)$ est positive sur l'intervalle [2,6] alors $\int_2^6 f(x)dx$ représente l'aire de la figure délimitée par l'axe des x, le graphe de la fonction et les droites verticale des $x = 2\ et\ x = 6$.

$$\int_2^6 f(x)dx = A_1 + A_2$$

A_1 représente l'aire d'un carré ($2 * 2 = 4$) plus l'aire d'un triangle ($\frac{1}{2} 2 * 2 = 2$) ; $A_1 = 4 + 2 = 6$

A_2 représente l'aire d'un rectangle ; $A_2 = 2 * 4 = 8$.

$$\int_0^6 f(x)dx = A_1 + A_2 = 4 + 2 + 8 = 14$$

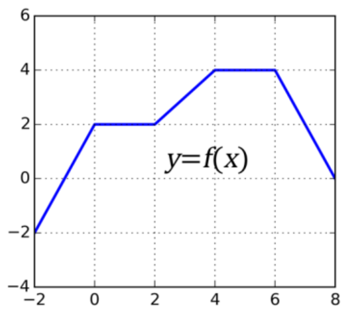


Figure 1

3.5.2. Calcul de l'intégrale définie. Formule de Newton Leibniz

Si la fonction f est continue sur l'intervalle $[a, b]$ et $F(x)$ est une primitive de $f(x)$,

$$F'(x) = f(x)$$

Formule de Newton Leibniz : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

On détermine la primitive $F(x)$, en calculant l'intégrale indéfinie $\int f(x)dx = F(x) + c$

Exemple calculer l'intégrale : $\int_1^2 (x^2 - 2x + 3)dx$

$$\int_1^2 (x^2 - 2x + 3)dx = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x|_1^2 = \frac{7}{3}$$