3-4 Intégration des fonctions trigonométriques

1. Si l'intégrale est de la forme $\int f(sinx)cosxdx$

En faisant le changement de variable :

$$u = sinx, \quad du = \cos xdx$$

L'intégrale s'écrit : $\int f(u)du$.

2. Si l'intégrale est de la forme $\int f(cox)sinxdx$

En effectuant le changement de variable :

$$u = cosx, \quad du = \sin xdx$$

L'intégrale s'écrit : $\int f(u)du$

- Si nécessaire, on utilise la relation

$$sinx^2 + cosx^2 = 1$$

pour passer de sinus au cosinus ou vice-versa.

Exemple 1. $\int sinx^2 cosxdx$

Par le changement de variable :

$$u = sinx, \quad du = \cos xdx$$

$\int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + c$

$\int sinx^2 cosxdx = \frac{1}{3}sinx^3 + c$

Exemple 2. $\int cosx^2 sinxdx$

Par le changement de variable :

$$u = cosx, \quad du = -\sin xdx$$

$\int -u^2 du = -\frac{1}{3}u^3 + c$

$\int cosx^2 sinxdx = -\frac{1}{3}cosx^3 + c$

Exemple 3. $\int sinx^3 dx$

$$\int sinx^3 dx = \int sinx^2\, sinxdx = \int (1 - cosx^2)sinxdx$$

Par le changement de variable : $u = cosx, \quad du = -\sin xdx$

$$\int (1 - cosx^2)sinxdx = \int -(1 - u^2)du = \int u^2\, du - \int du = \frac{1}{3}u^3 - u + c$$

$$\int sinx^2 dx = \frac{1}{3}cosx^3 - cosx + c$$

3. Si l'intégrale à intégrer ne dépend que de tgx ; $\int f((tgx)dx$.Utilisons le changement de variable suivant:

$$u = tgx, \qquad x = arctgu \Longrightarrow dx = \frac{du}{u^2+1}$$

Nous obtenons $\int f((tgx)dx = \int f(u)\frac{du}{u^2+1}$

Exemple. $\int \frac{tgx}{cos^2x}dx$

On a : $cos^2x = \frac{1}{1+tg^2x} \rightarrow \frac{1}{cos^2x} = 1 + tg^2x$. En substituant cette relation dans l'intégrale considérée :

$$\int \frac{tgx}{cos^2x}dx = \int tgx\frac{1}{cos^2x}dx = \int tgx(1 + tg^2x)dx = \int (tgx + tg^3x)dx = \int tgxdx + \int tg^3xdx$$

Par le changement de variable cité au-dessus, nous obtenons :

$$\int \frac{tgx}{cos^2x}dx = \int tgxdx + \int tg^3xdx = \int u\frac{du}{u^2+1} + \int u^3\frac{du}{u^2+1} \quad ; \quad \left[\frac{u^3}{u^2+1} = u - \frac{u}{u^2+1}\ (division)\right]$$

$$\int \frac{tgx}{cos^2x}dx = \int u\frac{du}{u^2+1} + \int (u - \frac{u}{u^2+1})\, du = \int u\frac{du}{u^2+1} + \int udu - \int u\frac{du}{u^2+1} = \int udu = \frac{1}{2}u^2 + c$$

$$\int \frac{tgx}{cos^2x}dx = \frac{1}{2}tg^2x + c$$

4. Intégrale du type

$$\int sinmxcosnxdx, \quad \int sinmxsinnxdx \quad et \ \int cosmxcosnxdx$$

Dans ce cas, on utilise les formules suivantes :

$$sinmxcosnx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)\,x + \sin(m-n)x]$$

$$sinmxsinnx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$$

$$cosmxcosnx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]$$

Exemple $\int cos\frac{x}{2}cos\frac{x}{3}dx$

$$cos\frac{x}{2}cos\frac{x}{3}dx = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)x + \cos\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x\right] = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{1}{6}\right)x + \cos\left(\frac{5}{6}\right)x\right]$$

$$\int cos\frac{x}{2}cos\frac{x}{3}dx = \int \frac{1}{2}\left[\cos\frac{1}{6}x + \cos\frac{5}{6}x\right]dx = \frac{1}{2}\left[\int \cos\frac{x}{6}dx + \int \cos\frac{5}{6}x\,dx\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left[6sin\frac{1}{6}x + \frac{6}{5}sin\frac{5}{6}x\right] + c$$

$$\int cos\frac{x}{2}cos\frac{x}{3}dx = 3sin\frac{x}{6} + \frac{3}{5}sin\frac{5}{6}x + c$$

5. Intégrale du type

$$I_{m,n} = \int sin^m xcos^n xdx \qquad (1)$$

On a **3 cas**, mais on considère **<u>2 cas</u>** seulement.

- **<u>1ier cas</u>** $\boldsymbol{m = 2k+1}$ **est un nombre positif impair**

$$I_{m,n} = \int sin^{(2k+1)}xcos^n xdx = \int sin^{2k}xsinxcos^n xdx \quad = \int (1-cos^2x)^k cos^n xsinxdx$$

Effectuons le changement de variable suivant

$$u = cosx \qquad du = -sinxdx$$

Substituons ces expressions dans l'équation 1, nous trouvons

$$I_{m,n} = \int (1-cos^2x)^k cos^n xsinxdx = -\int (1-u^2)^k u^n du$$

On procède de la même manière si **n est un nombre positif impair.**

- **<u>2ème cas</u> si m et n deux nombre positifs pairs**

On transforme l'expression (1) à l'aide des formules suivantes :

$$sin^2x = \frac{1}{2}(1-cos2x), \quad cos^2x = \frac{1}{2}(1+cos2x) \quad \text{et} \quad sinx\,cosx = \frac{1}{2}sin2x$$

Exemple $\int sin^3xcos^6xdx$ **;** $m = 3$ est un nombre positif impair $3 = 2k+1 = 2*1+1$

$$\int sin^3xcos^6xdx = \int sin^2xsinxcos^6xdx = \int (1-cos^2x)sinxcos^6xdx = \int cos^6xsinxdx - \int cos^8xsinxdx$$

Avec le changement de variable cité au-dessus, nous obtenons :

$$\int sin^3xcos^6xdx = \int -u^6du + \int u^8du = -\frac{1}{7}u^7 + \frac{1}{9}u^9 + c$$

$$\int sin^3xcos^6xdx = -\frac{1}{7}cos^7x + \frac{1}{9}cos^9x + c$$