4. 1. Les équations différentielles ordinaires.

Le terme équation différentielle (ED) est utilisé pour signifier équation différentielle ordinaire (EDO)

Définition : Une **équation différentielle** d'ordre n est une équation de la forme

$$F(x, y, y', \dots, y^n) = 0 \qquad (1)$$

Ou F est une fonction de (n+2) variables.

Une **solution** d'une telle équation sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction $y\colon I \to \mathbb{R}$

- qui est n fois dérivable,
- et qui vérifie l'équation (1).

Notation : y au lieu de $y(x)$, y' au lieu de $y'(x)$,…

Exemple 1 : $y' = cosx$ signifie $y'(x) = cosx.$

Exemple 2.

ED du 1er ordre $xy' + y - y^2 lnx = 0$

ED du 2ème ordre $y'' - 3y + 2y = 0$

ED du 3ème ordre $y''' + y = sinx = 0$

ED du 4ème ordre $y^{(4)} - 2y'' + y = 9e^{2x}$

4-2. Les équations différentielles d'ordre 1.

Définition : Une équation différentielle d'ordre 1 est donc une équation de la forme $F(x, y, y') = 0$, pouvant être vérifier en chaque point x d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, par une fonction notée $y = f(x)$ et par sa dérivée $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$.

$y = f(x)$ est la solution ou intégrale de l'équation différentielle.

A. Équation à variable séparées

1. **Définition** : On appelle équation différentielle à variables séparées, toute équation du type $\boldsymbol{y' = \frac{f(x)}{g(y)}}$, où $f(x)\ et\ g(y)$ sont deux fonctions définies respectivement sur I et K (I et K sont des intervalles de R).

2. **Résolution** : soit $y' = \frac{f(x)}{g(y)} \to \begin{cases} g(y)y' = f(x) \\ y' = \frac{dy}{dx} \end{cases} \to g(y)dy = f(x)dx$

Si $G(y)\ et\ F(x)$ sont des primitives des fonctions g et f, alors par intégration de chaque membre : $\int g(y)dy = \int f(x)dx$, On obtient : $G(y) = F(x) + c$

Cette équation définit la solution générale $y = f_k(x)$

Remarque $\boldsymbol{y' = \frac{g(y)}{f(x)}}$, $f(x) = 0$ est également une équation à variable séparées qui s'intègre de la même manière.

3. **Exemple 1**. Intégrer l'équation différentielle suivante :

$$x + yy' - 1 = 0$$

On sépare les variables :

$$\begin{cases} yy' = 1 - x \\ y' = \dfrac{dy}{dx} \end{cases} \to y\frac{dy}{dx} = 1 - x \to \boldsymbol{ydy = (1 - x)dx} \ \textit{équation à variables séparées}$$

On intègre des deux côtés

$$\int ydy = \int (1 - x)dx \to \frac{1}{2}y^2 = x - \frac{1}{2}x^2 + c \to \boldsymbol{y^2 = 2x - x^2 + c}$$

B. Équation différentielle homogène

1. **Définition :** on appelle équation différentielle homogène du premier ordre, une équation de la forme $\boldsymbol{F\left(y',\frac{y}{x}\right)=0}$ qui résolue en y' conduit à $\boldsymbol{y'=f(\frac{y}{x})}$.
2. **Résolution :** On résout l'équation sur $\mathbb{R}^*$, en posant $\frac{y}{x}=t\to y=tx$

L'équation résolue en $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)=f(t)$, associée à la relation :

$$y'=(tx)'\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{d(tx)}{dx}=x\frac{dt}{dx}+t\frac{dx}{dx}=x\frac{dt}{dx}+t$$

conduit à l'équation différentielle à variables séparées

$$f(t)=t+\frac{dt}{dx}\Leftrightarrow f(t)-t=\frac{dt}{dx}\ \Leftrightarrow\boldsymbol{\frac{dx}{x}=\frac{dt}{f(t)-t}}\quad(si\ f(t)-t\neq0)$$

Par intégration $ln|x|=\int\frac{dt}{f(t)-t}=F(t)+k$ d'où

$$\boldsymbol{x=ce^{F(t)}},\qquad\boldsymbol{y=cte^{F(t)}\ avec\ c=e^{k}}$$

3. **Exemple** : trouver l'intégrale

$$x^2+y^2=2xyy'$$

Solution

$$x^2+y^2=2xyy',\qquad x\neq0\ et\ y\neq0,$$

$$y'=\frac{x^2+y^2}{2xy}=\frac{x^2(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2)}{x^2(2\frac{y}{x})}\to\quad\boldsymbol{y'=\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\frac{y}{x}}}\quad est\ une\ équation\ homogène$$

$$On\ pose\ \frac{y}{x}=t\to y=tx\ \ et\ \ l'équation\ homogène\ s'écrit\ y'=\frac{1+t^2}{2t}$$

$$\begin{cases}y=tx,\ \ y'=(tx)'=x\dfrac{dt}{dx}+t\\ \qquad\qquad y'=\dfrac{1+t^2}{2t}\end{cases}\Rightarrow x\frac{dt}{dx}+t=\frac{1+t^2}{2t}\Leftrightarrow\frac{dx}{x}=\frac{2t}{1-t^2}dt\ \ avec\ t\neq\pm1$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{2t}{1-t^2}dt\qquad(1)\qquad est\ une\ équation\ à\ variables\ séparées.$$

La résolution de l'équation (1) $\begin{cases}\displaystyle\int\frac{dx}{x}=\int\frac{2t}{1-t^2}dt\ \to ln|x|=-ln|1-t^2|+ln|k|,\ \ k\neq0\\ \qquad\qquad x=\dfrac{k}{1-t^2}\ \ et\ y=\dfrac{kt}{1-t^2}\end{cases}$

L'équation cartésiènne s'obtient en éliminant t

$$soit\ \ x=\frac{k}{1-t^2}=\frac{k}{1-\frac{y^2}{x^2}}=\frac{x^2k}{x^2-y^2}\to\boldsymbol{y^2-x^2+kx=0}$$

4.3. Les équations différentielles linéaires

1. Définition : Une équation différentielle d'ordre n est **linéaire** si elle est de la forme

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_n(x)y^n = g(x)$$

Le terme linéaire signifie que tous les y^i sont de degré 1.

Ou les $a_i(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions réelles continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Les $a_i(x)$ sont appelés les coefficients et $g(x)$ le second membre.

- Une équation différentielle linéaire est **homogène**, ou **sans second membre**, si la fonction g est la fonction nulle

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_n(x)y^n = 0$$

- Une équation différentielle linéaire est à **coefficients constants** si

$$a_0y + a_1y' + \cdots + a_ny^n = g(x)$$

Ou les a_i sont des constantes réelles et g une fonction continue.

2. Exemples

1. $y' + 5xy = e^x$ est une équation linéaire du premier ordre avec second membre,
2. $y' + 5xy = 0$ est l'équation différentielle homogène associée à la précédente,
3. $2y'' - 3y' + 5y = 0$ est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficient constants, sans second membre et
4. $y'^2 - y = x \quad ou \quad y''.y' - y = 0$ ne sont pas des équations différentielles linéaires.

Proposition Principe de linéarité

Si $y_1$et y_2 sont solutions de l'équation différentielle linéaire homogène

Alors, quels que soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2, \alpha y_1 + \beta y_2$ est aussi solution de cette équation.

4.3.1. Équations différentielles linéaire d'ordre 1

1. **Définition :** une équation linéaire d'ordre 1 est une équation du type

$$a(x)y' + b(x)y = c(x) \quad \text{ou bien} \quad y' + b(x)y = c(x) \qquad (1)$$

Ou a, b et c sont des fonctions définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$

2. **Résolution d'une équation différentielle linéaire homogène**

Remarque : l'équation homogène est une équation à variables séparées.

$$y' + b(x)y = 0 \ \rightarrow \ y' = -b(x)y \rightarrow \begin{cases} \dfrac{y'}{y} = -b(x) \\ y' = \dfrac{dy}{dx} \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -b\,(x)dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int b\,(x)dx\,, ln|y| = -\int b\,(x)dx + c \Rightarrow |y| = e^{-\int b\,(x)dx + c}$$

$$|y| = e^{c}e^{-\int b\,(x)dx} \Rightarrow \boldsymbol{y = ke^{B(x)}}, \quad k = e^{c}$$

Avec $k \in \mathbb{R}$ et $B(x)$ est une primitive de $-b(x)$.

On note $\boldsymbol{y_h}$ pour les solutions de l'équations homogène.

Les solutions de l'équations homogène sont sous la forme $\boldsymbol{y_h = ke^{B(x)}}$

Proposition : Si $y_p$est une solution particulière de (1) , alors les **solution générales** de (1) sont les fonctions $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$\boldsymbol{y = y_p + y_h} \quad \textbf{avec} \quad \boldsymbol{y_h = ke^{B(x)}}, \quad k \in \mathbb{R}$$

3. **Solution particulière par la méthode de la variation de la constante**

Les solutions de l'équations homogène sont : $\boldsymbol{y_h = ke^{B(x)}}$

Chercher une solution particulière sous la forme $y_p = \boldsymbol{k(x)e^{B(x)}}$**.**

$$B'(x) = -b(x) \rightarrow \left(e^{B(x)}\right)' = -b(x)e^{B(x)}$$

$$y_p' = (k(x)e^{B(x)})' = -b(x)k(x)e^{B(x)} + k'(x)e^{B(x)} = -b(x)y_p + k'(x)e^{B(x)}$$

$$y_p' + b(x)y_p = k'(x)e^{B(x)}$$

Donc y_p est une solution de si et seulement si

$$k'(x)e^{B(x)} = c(x) \Leftrightarrow k'(x) = c(x)e^{-B(x)} \Leftrightarrow k(x) = \int c(x)\, e^{-B(x)}dx$$

Ce qui donne une solution particulière

$$y_p = \left(\int c(x)\, e^{-B(x)}dx\right) e^{B(x)}dx \qquad de\ (1)\ sur\ I$$

Les solutions générales de (1) sont données par :

$$\boldsymbol{y = y_p + y_h = \left(\int c(x)\, e^{-B(x)}dx\right) e^{B(x)} + ke^{B(x)}}, \quad k \in \mathbb{R}$$

- **Solution vérifiant une condition initiale**

La donnée d'une condition initiale pour l'équation différentielle d'ordre 1 sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ est un point $(x_0, y_0) \in I$. Une solution satisfaisnat à cette condition initiale est une solution y telle que $y(x_0) = y_0$

Théorème Il existe une **seul** solution de l'équation différentielle d'ordre 1 sur *I* satisfaisnat à la condition initiale $y(x_0) = y_0$

Exemple : trouver l'intégrale pour le point (1,0)

$$x^2 + y^2 = 2xyy'$$

Solution (voir la page 14)

$$\boldsymbol{y^2 - x^2 + kx = 0}$$

Pour le point (1,0), $x = 1$ et $y = 0$, $\boldsymbol{-1 + k = 0 \Rightarrow k = 1}$, $\boldsymbol{y^2 - x^2 + x = 0}$