4. 4. Équations différentielles linéaire du second ordre à coefficient constant

1. **Définition** Une équation différentielle linéaire du **second ordre**, à **coefficients constants**, est une équation de la forme :

$$ay'' + by' + cy = g(x) \qquad (E)$$

Ou $a, b, c \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$ et g est une fonction continue sur un intervalle ouvert I.

- L'équation différentielle :

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (E_0)$$

est appelée **l'équation homogène** associée à (E)

Proposition la solution générale y de (E) est la somme de la solution générale y_h de E_0 et d'une solution particulière y_p de (E). $\boldsymbol{y = y_h + y_p}$

- Pour résoudre une équation différentielle linéaire avec second membre, avec ou sans conditions initiales. on cherche d'abord les solutions homogènes de (E_0), puis une solution particulière de l'équation (E) avec second membre et on applique le principe de superposition.

4. 4. 1. Résolution de l'équation homogène

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (E_0)$$

On cherche la solution sous la forme $y = e^{rx}, r \in \mathbb{C}$. On a donc $y' = re^{rx}$ et $y'' = r^2e^{rx}$. En reportant dans (E_0):

$$e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0$$

Puisque e^{rx} ne s'annule jamais, r est solution de l'équation du second degré

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad (EC)$$

Se nomme l'équation caractéristique.

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$, le discriminant

Théorème

1. **Si $\boldsymbol{\Delta > 0}$**, l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes $r_1 \neq r_2$; $r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, les solutions de (E_0) sont les
$$\boldsymbol{y(x) = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}} \quad où\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}^2$$
2. **Si $\boldsymbol{\Delta = 0}$**, l'équation caractéristique possède une racine double $r_0 = -\frac{b}{2a}$ et les solutions de (E_0) sont les
$$\boldsymbol{y(x) = (C_1x + C_2)e^{r_0x}} \quad où\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}^2$$
3. **Si $\boldsymbol{\Delta < 0}$**, l'équation caractéristique possède deux racines complexes $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$ et les solutions de (E_0) sont les
$$\boldsymbol{y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))} \quad où\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}^2$$

Exemples

1. Résoudre $y'' - y' - 2y = 0$
   - L'équation caractéristique : $r^2 - r - 2 = 0$, $\Delta = 3$
   - $\Delta > 0, r_1 = -1, r_2 = 2$
   - L'ensembles des solution sont : $y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^2$
2. Résoudre $y'' - 4y' + 4y = 0$
   - L'équation caractéristique : $r^2 - 4r + 4 = 0$
   - $\Delta = 0, r_0 = 2$
   - L'ensembles des solution sont : $y(x) = (C_1x + C_2)e^{2x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^2$
3. Résoudre $y'' - 2y' + 5y = 0$
   - L'équation caractéristique : $r^2 - 2r + 5 = 0$, $\Delta = -16$
   - $\Delta < 0, r_1 = 1 - 2i$, $r_2 = 1 + 2i$
   - L'ensembles des solution sont : $y(x) = e^x(C_1cos2x + C_2sin2x)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^2$

4. 4. 2. Solution particulière de l'équation $(\boldsymbol{E})$

$$ay'' + by' + cy = g(x) \qquad (E)$$

Recherche d'une solution particulière $\boldsymbol{y_p}$ par identification

A. Second membre du type $\boldsymbol{e^{\alpha x}P(x)}$

$$g(x) = e^{\alpha x}P(x), \qquad \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } P(x) \text{ est un polynôme.}$$

On cherche une solution particulière sous la forme $\boldsymbol{y_p = e^{\alpha x}x^mQ(x)}$

Avec $Q(x)$ est un polynôme de même degré que $P(x)$

1. $y_p = e^{\alpha x}Q(x), m = 0$ si α n'est pas une racine de l'équation caractéristique ($\alpha \neq r_1$ et $\alpha \neq r_2$).
2. $y_p = xe^{\alpha x}Q(x), m = 1$ si α est une racine simple de l'équation caractéristique ($\alpha = r_1$ ou $\alpha = r_2$).
3. $y_p = x^2e^{\alpha x}Q(x), m = 2$ si α est une racine double de l'équation caractéristique ($\alpha = r_0$).

B. Second membre du type $\boldsymbol{e^{\alpha x}(P_1(x)cos(\beta x) + P_2sin(\beta x))}$

$$g(x) = e^{\alpha x}\big(P_1(x)cos(\beta x) + P_2sin(\beta x)\big), \quad \alpha \text{ et } \beta \in \mathbb{R}^2$$

On cherche une solution particulière sous la forme :

1. $y_p = e^{\alpha x}(Q_1(x)cos(\beta x) + Q_2sin(\beta x))$, si $\alpha + i\beta$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique,
2. $y_p = xe^{\alpha x}(Q_1(x)cos(\beta x) + Q_2sin(\beta x))$, si $\alpha + i\beta$ est une racine de l'équation caractéristique,

Où $Q_1(x)$ et $Q_2(x)$ sont deux polynômes de degré n; $n = max\{\deg P_1, \deg P_2\}$

- **Solution vérifiant les conditions initiales**

Théorème pour chaque $x_0 \in I$ et chaque couple $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$, l'équation $ay'' + y' + cy = g(x)$ admet une **unique** solution $y(x)$ sur I satisfaisant aux conditions initiales :

$$y(x_0) = y_0 \; et \; y'(x_0) = y_1$$

- La résolution d'une équations différentielles linéaire du second ordre à coefficient constant se fait en trois étapes :

  1. Recherche de la solution générale y_h de l'équation sans second membre,

  2. Recherche d'une solution particulière y_p par identification,

  3. Solution générale : $y = y_h + y_p$.

  Exemple

  a. Résoudre : $y'' - 5y' + 6y = 4xe^x$ (1)

  b. Trouver la solution vérifiant $y(0) = 1 \; et \; y'(0) = 0$

Solution

a. Résoudre : $y'' - 5y' + 6y = 4xe^x$ (1)

1. Recherche de la solution générale $\boldsymbol{y_h}$ de l'équation sans second membre :

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

- équation caractéristique : $r^2 - 5r + 6 = 0$, $\Delta = 1$
- $\Delta > 0$, $r_1 = 2$, $r_2 = 3$
- L'ensembles des solution sont : $\boldsymbol{y_h(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^2$

2. Recherche d'une solution particulière $\boldsymbol{y_p}$ par identification

Le second membre $\boldsymbol{4xe^x}$ est du type $\boldsymbol{e^{\alpha x}P(x)}$, avec $\alpha = 1$ et $P(x) = 4x$ est un polynôme de degré 1.

Donc la solution particulière est sous la forme $\boldsymbol{y_p = e^{\alpha x}x^mQ(x)}$

avec $Q(x) = ax + b$ est un polynôme de degré 1, $\alpha = 1 \neq r_{1,2}$ $donc\ m = 0$

Alors la solution particulière s'écrit :

$$\boldsymbol{y_p = e^x(ax + b)}$$

$$y_p' = (e^x(ax + b))' = e^x(ax + b) + ae^x$$

$$y_p'' = (e^x(ax + b) + ae^x)' = e^x(ax + b) + ae^x + ae^x = e^x(ax + b) + 2ae^x$$

En reportant dans $y'' - 5y' + 6y = 4xe^x$

$$e^x(ax + b) + 2ae^x - 5(e^x(ax + b) + ae^x) + 6e^x(ax + b) = 4xe^x$$

$$e^x((ax + b) + 2a - 5(ax + b + a) + 6(ax + b) = 4xe^x$$

$$(ax + b + 2a - 5(ax + b + a) + 6(ax + b)) = 4x$$

$$x(a - 5a + 6a) + b + 2a - 5(b + a) + 6b) = 4x$$

$$2ax + 2b - 3a = 4x \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 2b - 3a = 0 \Rightarrow b = 3 \end{cases}$$

Donc la solution particulière est $\boldsymbol{y_p = e^x(2x + 3)}$

Solutions générales : $\boldsymbol{y = y_h + y_p}$; $\begin{cases} y_h(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} \\ y_p = e^x(2x + 3) \end{cases}$

$$\boldsymbol{y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + e^x(2x + 3)}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}^2$$

b. Trouver la solution de cette équation différentielle vérifiant $y_0 = 1$ et $y_0' = 0$

$$\boldsymbol{y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + e^x(2x + 3)}$$

$$\boldsymbol{y_0 = 1 \Leftrightarrow y(0) = C_1 + C_2 + 3 = 1}$$

$$y_0' = 0 \Leftrightarrow 2C_1 + 3C_2 + 5 = 0$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = -2 \\ 2C_1 + 3C_2 = -5 \end{cases} \Rightarrow C_1 = -1, \quad C_2 = -1$$

$$\boldsymbol{y = (2x + 3)e^x - e^{2x} - e^{3x}}$$