Université Batna 2 13 /05/ 2020

Faculté : Institue d'Hygiène et Sécurité

Département : Socle Commun HS 1ère année

Corrigé de la série des exercices n°3

Exercice n°1. Résolvons les équations à variables séparées :

$a) y' = e^{x+y}, \begin{cases} y' = \dfrac{dy}{dx} \\ e^{x+y} = e^x e^y \end{cases}, y' = e^{x+y} \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = e^x e^y \Leftrightarrow \dfrac{dy}{e^y} = e^x dx \Leftrightarrow e^{-y} dy = e^x dx$

$$\int e^{-y} dy = \int e^x dx, \quad -e^{-y} = e^x + c \Leftrightarrow e^{-y} = C - e^x; \ -y = \ln(C - e^x)$$

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{\ln(C - e^x)}}$$

$b)\ x + yy' - 1 = 0, \qquad yy' = 1 - x \Leftrightarrow y\dfrac{dy}{dx} = 1 - x \ \Leftrightarrow ydy = (1 - x)dx$

$$\int ydy = \int (1 - x)dx, \qquad \frac{1}{2}y^2 = x - \frac{1}{2}x^2 + c, \ \boldsymbol{y^2 + x^2 - 2x = C}$$

$c)\ xyy' = 1 - x^2 \Leftrightarrow y\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 - x^2}{x} \Leftrightarrow \ ydy = \dfrac{1 - x^2}{x}dx \Leftrightarrow ydy = (\dfrac{1}{x} - x)dx$

$$\int ydy = \int (\frac{1}{x} - x)dx, \ \frac{1}{2}y^2 = ln|x| - \frac{1}{2}x^2 + lnc, \quad \boldsymbol{y^2 + x^2 = lnCx^2}$$

Exercice n°2. Résolvons les équations homogènes

$a)\ (x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0, x \neq 0 et\ y \neq 0$

$$2xydy = (3y^2 - x^2)dx \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy} = \frac{x^2\left(3\dfrac{y^2}{x^2} - 1\right)}{x^2\left(2\dfrac{y}{x}\right)} = \frac{3(\dfrac{y}{x})^2 - 1}{2\dfrac{y}{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(\dfrac{y}{x})^2 - 1}{2\dfrac{y}{x}} \qquad (1)$$

On pose : $t = \frac{y}{x}, y = tx \rightarrow y' = x\frac{dt}{dx} + t$

Et l'équation (1) s'écrit en fonction de t ; $y' = \frac{3t^2-1}{2t}$

$$\begin{cases} y' = x\dfrac{dt}{dx} + t \\ y' = \dfrac{3t^2-1}{2t} \end{cases} \rightarrow x\frac{dt}{dx} + t = \frac{3t^2-1}{2t} \rightarrow x\frac{dt}{dx} = \frac{t^2-1}{2t} \Leftrightarrow \frac{2t}{t^2-1}dt = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{2t}{t^2-1}dt\,, ln|x| = ln|t^2-1| + ln|c| \; avec \; c \neq 0$$

$$\boldsymbol{x = c(t^2-1)}, \quad \boldsymbol{y = ct(t^2-1)} \;\; avec \;\; t \neq \pm 1$$

En éliminant t, $\boldsymbol{x = c\left((\frac{y}{x})^2 - 1 \right)}$

$$b)\; x(y-4x)y' + 5xy = x^2 + y^2 \Leftrightarrow \; y' = \frac{x^2+y^2-5xy}{x(y-4x)} \Leftrightarrow y' = \frac{\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) - 5\frac{y}{x}}{\frac{y}{x} - 4} \qquad (1)$$

On pose : $t = \frac{y}{x}, y = tx \rightarrow y' = x\frac{dt}{dx} + t$

Et l'équation (1) s'écrit en fonction de t ;

$$y' = \frac{1+t^2-5t}{t-4}$$

$$\begin{cases} y' = x\dfrac{dt}{dx} + t \\ y' = \dfrac{1+t^2-5t}{t-4} \end{cases} \rightarrow x\frac{dt}{dx} + t = \frac{1+t^2-5t}{t-4} \Leftrightarrow \frac{t-4}{1-t}dt = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{t-4}{1-t}dt \qquad (2)$$

$$\frac{t-4}{1-t} = \frac{3}{t-1} - 1 \; (division);$$ donc l'équation (2) s'écrit

$$\int \frac{dx}{x} = \int \left(\frac{3}{t-1} - 1\right)dt\,; \quad ln|x| = 3ln|t-1| - t + ln|c|; c \neq 0$$

$$x = c(t-1)^3 e^{-t}, \quad y = ct(t-1)^3 e^{-t}$$

En éliminant t, $\boldsymbol{x = c(\frac{y}{x} - 1)^3 e^{-\frac{y}{x}}}$

Exercice n°3. Résolvons les équations différentielles linéaire d'ordre 1 suivantes :

$a)\;\; y' - 2xy = e^{x^2} sinx$

1. Résolvons l'équation homogène : $y' - 2xy = 0$, $\begin{cases} y' = 2xy \\ y' = \frac{dy}{dx} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = 2xdx$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2xdx \rightarrow ln|y| = x^2 + c \rightarrow y = ke^{x^2}, \;\; k = e^c$$

Les solutions de l'équations homogène sont : $\boldsymbol{y_h = ke^{x^2}}$

2. Solution particulière par la méthode de la variation de la constante

$$y_p = k(x)e^{x^2}; \quad y_p' = (k(x)e^{x^2})' = 2xe^{x^2}k(x) + k'(x)e^{x^2}$$

$$y_p' - 2xy_p = k'(x)e^{x^2}$$

Donc y_p est une solution de si et seulement si

$$k'(x)e^{x^2} = e^{x^2}sinx \rightarrow \begin{cases} k'(x) = sinx \\ k'(x) = \dfrac{dk(x)}{dx} \end{cases} \rightarrow \int dk(x) = \int sinxdx \Longrightarrow$$

$$k(x) = -cosx + C$$

Ce qui donne un solution particulière ; $\boldsymbol{y_p = (C - cosx)e^{x^2}}$

Les solutions générales de : $y' - 2xy = e^{x^2}sinx$ sont données par

$$y = y_h + y_p \Leftrightarrow y = \boldsymbol{ke^{x^2}} + (\boldsymbol{C - cosx})\boldsymbol{e^{x^2}}$$

$$\boldsymbol{y = Ke^{x^2} - e^{x^2}cosx}; \quad \boldsymbol{K} \in \mathbb{R}$$

$b)\ x^2y' + (1-2x)y = x^2$

1. Résolvons l'équation homogène :

$$x^2y' + (1-2x)y = 0, \begin{cases} y' = \dfrac{(2x-1)y}{x^2} \\ y' = \dfrac{dy}{dx} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2x-1}{x^2}dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int (\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2})dx \rightarrow ln|y| = lnx^2 + \frac{1}{x} + lnk \rightarrow y = kx^2e^{\frac{1}{x}}$$

Les solutions de l'équations homogène sont $\boldsymbol{y_h = kx^2e^{\frac{1}{x}}}$

2. Solution particulière par la méthode de la variation de la constante

$$y_p = k(x)x^2e^{\frac{1}{x}} \rightarrow y_p' = (k(x)x^2e^{\frac{1}{x}})' = \left(2xe^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}}\right)k(x) + k'(x)x^2e^{\frac{1}{x}}$$

$$y_p' = \left(2xe^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}}\right)k(x) + k'(x)x^2e^{\frac{1}{x}}$$

En reportant y_p et y_p' dans l'équation $x^2y' + (1-2x)y = x^2$, on trouve :

$$\begin{cases} k'(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} \\ k'(x) = \dfrac{dk(x)}{dx} \end{cases} \Leftrightarrow \int dk(x) = \int \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}dx = e^{-\frac{1}{x}} + c; \ \ k(x) = e^{-\frac{1}{x}} + c$$

Ce qui donne une solution particulière : $\boldsymbol{y_p = x^2(1 + ce^{\frac{1}{x}})}$

Les solutions générales de $x^2y' + (1-2x)y = x^2$ sont données par

$$y = y_h + y_p \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{y = (x^2 + K)e^{\frac{1}{x}}}$$

Exercice n°4. Résolvons les équations différentielles linéaire d'ordre 2 suivantes :

$a)\ 3y'' + y' - 4y = x^2 \qquad (1)$

1. Résolvons l'équation homogène : $3y'' + y' - 4y = 0$
   - L'équation caractéristique : $3r^2 + r - 4 = 0$
   - $\Delta = 7 > 0; \quad r_1 = -\frac{4}{3}; \quad r_2 = 1$
   - L'ensembles des solutions sont : $\boldsymbol{y_h = C_1 e^{-\frac{4}{3}x} + C_2 e^{x}};\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}^2$
2. Recherche d'une solution particulière par identification

Le second membre :

$$\boldsymbol{x^2} est\ du\ type\ \boldsymbol{e^{\alpha x} P(x)}\ avec \begin{cases} \alpha = 0 \\ P(x) = x^2 \to polyôme\ de\ degré\ 2 \end{cases}$$

Donc la solution particulière est sous la forme

$$y_p = e^{\alpha x} x^m Q(x) \begin{cases} \alpha = 0 \neq r_{1,2}\ \ donc\ m = 0 \\ Q(x) \text{ est un polynôme de degré 2 ; } Q(x) = ax^2 + bx + c \end{cases}$$

Alors la solution particulière s'écrit : $\boldsymbol{y_p = ax^2 + bx + c}$

$$y_p' = 2ax + b, \quad y_p'' = 2a$$

En reportant dans l'équation (1)

$$3(2a) + (2ax + b) - 4(ax^2 + bx + c) = x^2$$

$$(6a + b - 4c) + x(2a - 4b) - 4ax^2 = x^2$$

$$\text{Par identification : } \begin{cases} 6a + b - 4c = 0 \\ 2a - 4b = 0 \\ -4a = 1 \end{cases} \Longrightarrow a = -\frac{1}{4}, b = -\frac{1}{8} \quad et\ c = -\frac{13}{32}$$

Donc la solution particulière est $\boldsymbol{y_p = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{13}{32}}$

$$\text{Solutions générales : } y = y_h + y_p; \begin{cases} y_h = C_1 e^{-\frac{4}{3}x} + C_2 e^{x} \\ y_p = -\dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{8}x - \dfrac{13}{32} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{y = C_1 e^{-\frac{4}{3}x} + C_2 e^{x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{13}{32}}$$

$b)\ y'' + y = xsinx \quad (2)$

1. Résolvons l'équation homogène : $y'' + y = 0$
   - Equation caractéristique : $r^2 + 1 = 0$
   - $r_1 = i, \quad r_2 = -i$
   - L'ensemble des solutions sont : $\boldsymbol{y_h = C_1 cosx + C_2 sinx}$
2. Recherche d'une solution particulière par identification

   Le second membre :

$\boldsymbol{xsinx}$ est du type $\boldsymbol{e^{\alpha x}(P_1(x)\cos(\beta x) + P_2(x)\sin(\beta x))}avec \begin{cases} \alpha = 0, \ \beta = 1 \\ P_1(x) = 0 = \text{cte} \to \text{degré } 0 \\ P_2(x) = x \ \to degré\ 1 \end{cases}$

$$\alpha + i\beta = i \ = r_1 \to y_p = x(Q_1(x)cosx + Q_2(x)sinx)$$

$$degré\ (Q_1(x)\ et\ Q_2(x)) = 1 \to Q_1(x) = ax + b, \ \ Q_2(x) = cx + d$$

$$y_p = (ax^2 + bx)cosx + (cx^2 + dx)sinx$$

$$y_p' = [(2ax + b)cox - (ax^2 + bx)sinx] + [(2cx + d)sinx + (cx^2 + dx)cosx]$$

$$y_p'' = [2a - (ax^2 + bx) + (4cx + 2d)]cosx + [2c - (cx^2 + dx) - (4ax + 2b)]sinx$$

En reportant y_p'' et y_p dans l'équation (2) :

$$[2a + 2d + 4cx]cox + [2c - 2b - 4ax]sinx = xsinx$$

Par identification $\begin{cases} 2a + 2d + 4cx = 0 \Longrightarrow \begin{cases} 2a + 2d = 0 \\ c = 0 \end{cases} \\ 2c - 2b - 4ax = x \Longrightarrow \begin{cases} 2c - 2b = 0 \\ -4a = 1 \end{cases} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ d = \frac{1}{4} \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$

Donc la solution particulière est $\boldsymbol{y_p = -\frac{1}{4}x^2 cosx + \frac{1}{4} sinx}$

Les solutions générales sont : $\boldsymbol{y = y_h + y_p}$ $\begin{cases} y_h = C_1 cosx + C_2 sinx \\ y_p = -\frac{1}{4}x^2 cosx + \frac{1}{4} sinx \end{cases}$

$$\boldsymbol{y = C_1 cosx + C_2 sinx - \frac{1}{4}x^2 cosx + \frac{1}{4} sinx}$$