

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE BATNA2  
FACULTE DE TECHNOLOGIE  
DEPARTEMENT DE MECANIQUE**

2019/2020

**SUPPORT DE COURS  
(2semaines)**

# **METHODE DES ELEMENTS FINIS**

**CHAPITRE I : Concepts de Base**

**MASTER I FMP**

**Par : Pr. REBIAI Cherif**

## I. Introduction sur la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est une méthode de calcul numérique qui, ayant un profond caractère plus physique qu'abstrait, a été inventée plutôt par les ingénieurs que par des mathématiciens.

Elle consiste à résoudre certains problèmes de physique. Elle permet de déterminer une solution approchée sur un domaine quelconque, c'est-à-dire qui permet de calculer un champ (de scalaires, de vecteurs, de tenseurs) qui correspond à certaines équations et à certaines conditions imposées.

Dans la méthode des éléments finis on découpe un domaine en sous domaines appelés éléments ou mailles et on cherche une formulation simplifiée sur chaque élément, c'est-à-dire à transformer le système d'équations quelconque en un système d'équations linéaires. Chaque système d'équations linéaires peut se représenter par une matrice. Les systèmes d'équations pour tous les éléments sont ensuite rassemblés, ce qui forme une grande matrice ; la résolution de ce système global donne la solution approximative au problème.

Il existe plusieurs modèles par éléments finis, dont on peut citer : le modèle en déplacement (méthode de rigidité) qui est une des trois formulations existantes d'analyse matricielle, modèle en déformation, en contrainte, mixte, hybride, variationnelle etc.). Dans ce polycopié de cours nous intéressons à l'étude de la méthode de déplacement ou de rigidité.

### 1.1 .Energie de déformation

En physique, l'énergie de déformation est l'énergie stockée par un système en cours de déformation.

Cette énergie est donnée par :  $U = \frac{P\delta}{2}$  , (1.1) avec P : Force et  $\delta$  : déplacement

Ou d'après la loi de Hook :  $\delta = \frac{PL}{SE}$  (1'.1) avec S : section et E : module de Young, L : longueur

Donc en traction-compression l'énergie de déformation en fonction de la force P peut

être donnée par :  $U = \frac{P^2L}{2SE}$  (1.2).

En fonction de l'allongement  $\delta$  elle est donnée par  $U = \frac{SE\delta^2}{2L}$  (1.3)

En pratique l'énergie de déformation par unité de volume  $W$  est souvent très importante. Sa valeur exprimée déjà par les équations (1.2) et (1.3) s'écrit :  $W = \frac{U}{SL} = \frac{\sigma^2}{2E}$  (1.4)

Ou  $\sigma = \varepsilon.E$  d'où

$$W = \frac{E\varepsilon^2}{2} \quad (1.5).$$

Avec  $\sigma$  et  $\varepsilon$  la contrainte et la déformation successivement.

Le principe est le même pour les autres modes de sollicitations tel que pour le cisaillement et la torsion l'énergie de déformation en fonction de la force  $P$  et à partir de l'équation (1) elle est donnée par :

Cisaillement :  $U = \frac{P^2L}{2SG}$  avec  $G$  : module de cisaillement. (1.6)

Torsion :  $U = \frac{Mt^2L}{2GIp}$  (1.7).

Avec  $Mt$  : moment de torsion et  $Ip$  moment quadratique polaire.

Pour la flexion pure cas d'une barre prismatique on a :

Le déplacement angulaire à l'extrémité libre de la barre est donné par :

$$\varphi = \frac{M_f L}{EI_z} \quad (1.8)$$

Ce déplacement est proportionnel au moment fléchissant  $M$ . L'énergie emmagasinée dans la barre est :  $U = \frac{M_f \varphi}{2}$  (1.9)

Alors en utilisant les équations (1.8) et (1.9) cette énergie s'exprime par :  $U = \frac{M^2 L}{2EI_z}$  (1.10)

ou  $U = \frac{\varphi^2 EI_z}{2L}$  (1.11).

### 1.1.1. Théorème de Castigliano

Connaissant les expressions de l'énergie de déformation dans différents cas, on établit une méthode très simple de calcul des déplacements des points d'un solide élastique pendant la déformation.

Par exemple dans le cas de traction simple l'énergie de déformation est donnée par

$U = \frac{P^2 L}{2SE}$  Si on dérive cette expression par rapport à la force P nous obtenons :

$$\frac{dU}{dP} = \frac{PL}{SE} = \delta$$

Donc la dérivée de l'énergie de déformation par rapport à P donne le déplacement correspondant à la charge (déplacement du point d'application de la charge suivant la direction de la charge).

### 1.2. Méthodes d'analyse Matricielles

Les méthodes matricielles en analyse des structures peuvent être formulées de trois façons différentes.

- 1- Méthode de rigidité ou de déplacements.
- 2- Méthode de souplesse ou de forces.
- 3- Méthode mixte.

Les méthodes de déplacements et des forces diffèrent par la façon dont les deux conditions de base d'équilibre et de compatibilité sont appliquées aux nœuds. Pour la première méthode, les conditions de compatibilité des déplacements sont satisfaites et les équations d'équilibre sont posées et résolues pour obtenir les déplacements nodaux inconnus ; pour la deuxième, les conditions d'équilibre aux nœuds sont d'abord satisfaites, puis on pose les équations exprimant la compatibilité des déplacements nodaux et on les résout pour obtenir les forces inconnues dans les différentes parties de la structure.

### 1.3. Principe des travaux virtuels

Le principe des travaux virtuels ou PTV est un principe fondamental en mécanique qui postule un équilibre de puissance dans un mouvement virtuel, et s'appelle aussi principe des puissances virtuelles. Ce principe peut s'utiliser pour déterminer les

propriétés de rigidité des divers éléments. Il exprime les relations existant entre l'ensemble des charges extérieures et les forces intérieures correspondantes satisfaisant ensemble à la condition d'équilibre, et l'ensemble des déplacements des nœuds et les déformations correspondantes des différentes parties satisfaisant à la condition de compatibilité. Ce principe peut être posé en termes généraux de la façon suivante : le travail virtuel des charges des charges extérieures est égal au travail virtuel interne absorbé par la structure. En termes mathématique ce principe peut être exprimé par :  $\sum F.\delta = \int \sigma.\varepsilon d(vol)$  (1.12)

Ou F représente le système des charges extérieures,  $\delta$  le déplacement de ces charges,  $\sigma$  le système des forces internes volumiques et  $\varepsilon$  les déformations internes de la structure.

#### 1.4. Principe Variationnel

L'ingénierie et la physique donnent naissance à d'autres problèmes continus, et ces problèmes sont généralement posés en termes d'équations différentielles, ou aux dérivées partielles, avec des conditions aux limites qui doivent être vérifiées par les fonctions inconnues.

Pour poser le problème à résoudre dans les termes les plus généraux, on cherche une fonction  $u$  qui satisfait un certain nombre d'équations différentielles :

$$A(u) = \begin{Bmatrix} A_1(u) \\ A_2(u) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} = 0 \quad (1.13)$$

Dans un domaine  $\Omega$  voir figure 1, ainsi que des conditions aux limites :

$$B(u) = \begin{Bmatrix} B_1(u) \\ B_2(u) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} = 0 \quad (1.14)$$

Sur le bord  $\Gamma$  du domaine Figure 1.1 Ou  $A(u)$  et  $B(u)$  sont des opérateurs définissant les équations différentielles et les conditions aux limites.

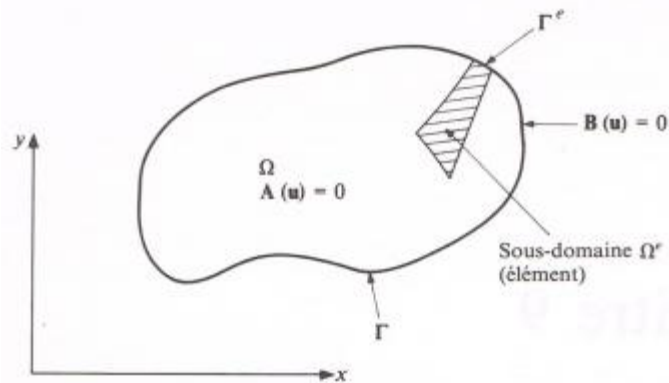


Figure 1.1. Domaine et frontière

La fonction cherchée peut être une fonction scalaire, ou peut représenter un vecteur à plusieurs composantes. De la même façon, il peut n'y avoir qu'une seule équation différentielle. C'est pour cela que la méthode matricielle est plus appropriée.

La MEF cherchera la solution sous la forme approchée suivante :

$$u \approx u' = \sum N_i a_i = Na \quad (1.15)$$

Où  $N_i$  sont les fonctions de formes ou d'interpolation écrites en fonction des variables indépendantes telles que (les coordonnées cartésiennes  $x, y$  etc...), et tous les paramètres  $a_i$  sont inconnus.

Nous allons chercher à réécrire les équations qui définissent les paramètres  $a_i$  inconnus sous une forme intégrale :

$$\int_{\Omega} G(u') d\Omega + \int_{\Gamma} g(u) d\Gamma = 0 \quad (1.16)$$

Avec  $j=1$  à  $n$  et  $G_j$  et  $g_j$  sont des fonctions connues.

Ces formes intégrales nous permettent d'obtenir l'approximation élément par élément et d'effectuer l'assemblage.

Si les fonctions  $G_j$  et  $g_j$  sont intégrables nous avons :

$$\int_{\Omega} G_j d\Omega + \int_{\Gamma} g_j d\Gamma = \sum_{e=1}^m \left( \int_{\Omega^e} G_j d\Omega + \int_{\Gamma^e} g_j d\Gamma \right) \quad (1.17)$$

Où  $\Omega^e$  est le volume de chacun élément, et  $\Gamma^e$ , sa position de la frontière. La méthode de résidus pondérés ou (méthode de Galerkin) est une procédure pour obtenir une telle formulation intégrale.

Si les équations différentielles sont linéaires, c'est-à-dire nous pouvons écrire les équations (1.13) et (1.14) sous la forme :

$$A(u) = Lu + p = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (1.18)$$

$$B(u) = Mu + t = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (1.19)$$

Alors le système approché (1.16) se réduira à un système linéaire de la forme :

$$Ka + f = 0 \quad (1.20)$$

## 1.5. Méthode de Galerkin (Résidus pondérés)

La méthode des résidus pondérés est une méthode générale de recherche de solutions approchées d'équations différentielles ou aux dérivées partielles.

### 1.5.1. Formulation intégrale ou formulation faible

Puisque l'ensemble des équations différentielles, ou aux dérivées partielles, (1.13) doit être vérifié en chaque point du domaine  $\Omega$ , alors :

$$\int_{\Omega} v^T A(u) d\Omega \equiv \int_{\Omega} [v_1 A_1(u) + v_2 A_2(u) + \dots] d\Omega \quad (1.121)$$

Où  $v$  est un ensemble de fonctions arbitraires, en nombre égal au nombre d'équations (composantes de  $u$ ) en jeu.

Pour satisfaire les C.L données par (1.14), on doit soit assurer ces C.L par le choix d'une fonction  $u'$ , soit vérifier que :

$$\int_{\Gamma} B(u) d\Gamma \equiv \int_{\Gamma} [v_1 B_1(u) + v_2 B_2(u) + \dots] d\Gamma = 0 \quad (1.22)$$

Pour tout ensemble de fonctions  $v$ .

En effet la formulation intégrale :

$$\int_{\Omega} v^T A(u) d\Omega + \int_{\Gamma} v^T B(u) d\Gamma = 0 \quad (1.23)$$

Soit satisfaite pour tous  $v$  et  $v'$  si et seulement si les équations différentielles (1.13) et les C.L (1.14) sont vérifiées.

Il est commode de voir que si les opérateurs  $A$  et  $B$  font intervenir des dérivations d'ordre  $n$ , les fonctions doivent avoir leurs dérivées continues jusqu'à l'ordre  $n-1$  (classe de continuité). Dans de nombreux cas il est possible d'intégrer (1.23) par parties.

Pr. REBIAI Cherif