

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE BATNA2  
FACULTE DE TECHNOLOGIE  
DEPARTEMENT DE MECANIQUE**

2019/2020

**SUPPORT DE COURS  
(2semaines)**

# **METHODE DES ELEMENTS FINIS**

**CHAPITRE II : Eléments linéaires de structures**

MASTER I AERO  
PROPULSION ET FMP

**Par : Pr.REBIAI Cherif**

## II.1. Eléments ressorts linéaire

### II.1.1. Dérivation de la matrice de rigidité pour un élément ressort

En utilisant l'approche d'équilibre direct, nous allons maintenant dériver la matrice de rigidité pour un ressort linéaire unidimensionnel, c'est-à-dire un ressort qui obéit à la loi de Hooke et résiste aux forces uniquement dans la direction du ressort.

Pour un tel élément figure 2.1, il existe une relation directe entre la force  $F$  dans le ressort et le déplacement  $\delta$  de son extrémité libre. Cette relation est :

$$\{F\} = [k] \cdot \{\delta\} \quad (2.1)$$

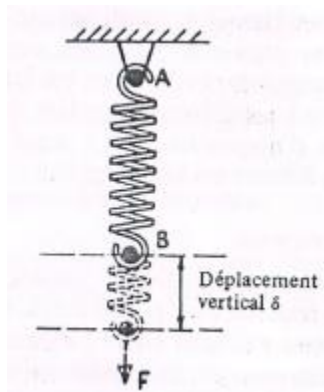


Figure 2.1 : Ressort élastique

La quantité  $k$  est appelée la rigidité ou raideur du ressort et correspond à la pente de la courbe : Force en fonction du déplacement figure 2.2. Ainsi si on connaît les valeurs de la rigidité et la force on peut calculer le déplacement.

$$\delta = \frac{1}{k} F \quad (2.2)$$

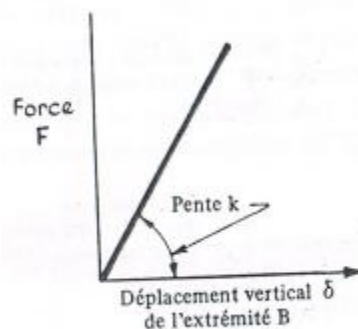


Figure 2.2. Relation force-déplacement pour un ressort élastique

## II.1.2. Matrice de rigidité pour un ressort élastique

Pour le ressort figure 2.2, un seul déplacement  $\delta$  est possible, mais si le ressort faisait une partie d'une structure quelconque, alors chaque extrémité admet un degré de liberté qui pourrait être libre ou encastré. Donc vu que le ressort admet deux nœuds et chacun admet un ddl et on peut lui exercer une force.

Le vecteur force est donc :  $F = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$  et le vecteur déplacement est :  $\delta = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}$

La matrice de rigidité est donc carrée d'ordre 2 et l'équation 2.1 prend la forme :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

Les éléments de la matrice sont pour le moment inconnus.

Pour déterminer les composantes de la matrice de rigidité du ressort, nous allons adopter chaque mode de déformation indépendamment. Deux cas seront étudiés figure 2.3:

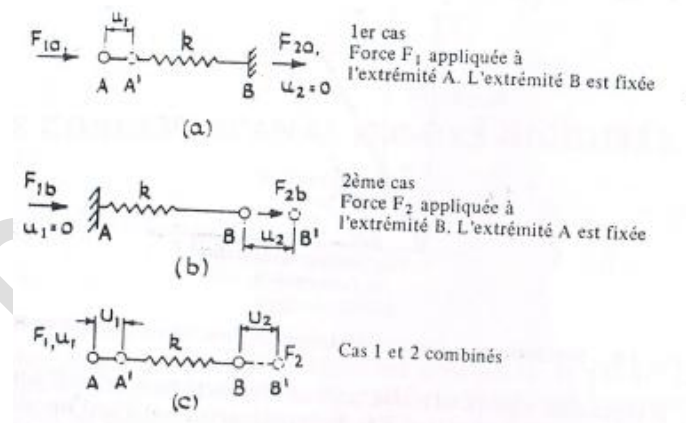


Figure 2.3 : Cas étudiés de ressorts

1er cas On a :  $F_{1a} + F_{2a} = 0 \Rightarrow F_{2a} = -F_{1a}$

$F_{1a} = k \cdot U_1 \Rightarrow F_{2a} = -k \cdot U_1$

2ème cas On a :  $F_{1b} + F_{2b} = 0 \Rightarrow F_{2b} = -F_{1b} = -k \cdot U_2$  et  $F_{2b} = k \cdot U_2$

Si on superpose en combinant les deux systèmes :

$F_{1a} + F_{1b} = F_1 \Rightarrow k \cdot U_1 - k \cdot U_2 = F_1$

$$F_{2a} + F_{2b} = F_2 \Rightarrow -k \cdot U_1 + k \cdot U_2 = F_2$$

Sous forme matricielle nous aurons :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

Ainsi la matrice de rigidité du ressort sera :

$$[k_e] = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Pour l'étude de l'assemblage de n ressorts des cas seront traités dans le TD.

## II.2. Eléments de Barre élastique

### II.2.1. Détermination de la matrice de rigidité de l'élément de barre

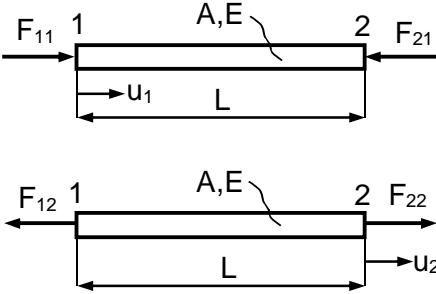
#### - Méthode directe.

On considère un élément de barre uniforme, prismatique et élastique, de longueur  $L$ , de module de Young  $E$  et de section transversale  $A$  (figure. 2.4). Un nœud est localisé à chacune des extrémités de la barre. Les seuls déplacements qui sont permis sont ceux axiaux.

On déplace d'abord le premier nœud, ensuite le deuxième et, dans chaque cas, on calcule les forces qui doivent être appliquées dans les nœuds pour maintenir le même état de déplacement.

Ces forces sont faciles à déterminer à partir de la formule élémentaire de la Résistance des matériaux,  $\delta = \frac{FL}{EA}$ , d'où la force qui résultera sera :  $F = \frac{EA}{L} \cdot \delta$ .

On note avec  $F_{ij}$  la force au nœud  $i$  ( $i=1,2$ ) associée au déplacement du nœud  $j$  ( $j=1,2$ ). Pour les deux cas, on aura :



$$F_{11} = F_{21} = \frac{EA}{L} \cdot u_1$$

$$F_{12} = F_{22} = \frac{EA}{L} \cdot u_2 \quad (2.6)$$

Fig.2.4 Forces nodales associées aux déplacements nodaux pour un élément de barre.

Si on écrit les relations (2.6) sous forme matricielle, on aura :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & -F_{12} \\ -F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

Conformément à la convention de signes, on considère que les forces ainsi que les déplacements sont positifs dans la même direction (dans notre cas de gauche à droite). Si on remplace les forces par les expressions (2.6) on aura :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L}u_1 & -\frac{EA}{L}u_2 \\ -\frac{EA}{L}u_1 & \frac{EA}{L}u_2 \end{bmatrix}$$

Ainsi on aura 
$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

### - Méthode Energétique

On partant de l'expression de l'énergie de déformation spécifique (énergie rapporté à l'unité de volume) pour un matériau élastique :

$$U_0 = \frac{\varepsilon^T \cdot D \cdot \varepsilon}{2} \quad (2.9)$$

On aura : si  $\sigma = D \cdot \varepsilon$  alors  $U_0 = \frac{1}{2} \varepsilon^T \cdot \sigma$  (2.10)

Si  $U = \frac{1}{2} \int_v U_0 \, dv = \frac{1}{2} \int_v \varepsilon^T \cdot \sigma \, dv = \frac{1}{2} \int_v \varepsilon^T \cdot D \cdot \varepsilon \, dv$  (2.11)

Si on remplace  $\{\varepsilon\} = [B] \cdot \{\delta\}$  on aura :

$$U = \frac{1}{2} \int_v \{\delta\}^T \cdot [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot \{\delta\} \, dv = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [k_e] \{\delta\} \quad (2.12)$$

En généralisant, cette formule de la matrice de rigidité élémentaire  $[K_e]$  est valable pour n'importe quel type d'élément. Cette formule générale est :

$$[K_e] = \int_v [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \, dv \quad (2.13)$$

où :

$[B]$  = matrice déformation-déplacement

$[D]$  = matrice d'élasticité

L'équation (2.13) est déduite du point de vue énergétique, pour obtenir la matrice [B] de l'élément barre, on commence par appliquer la méthode de Lagrange pour déterminer les fonctions d'interpolation ou de forme et on les dérive après pour avoir la matrice [B].

On a d'une autre manière :

$$[B] = [L] \cdot [N] \quad (2.14)$$

Où L : est l'opérateur différentiel et N : matrice des fonctions de forme.

Ainsi l'interpolation de Lagrange peut nous déterminer les fonctions de forme par :

$$N_1 = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{X - L}{-L} = \frac{L - X}{L} \quad (2.15)$$

$$\text{Et } N_2 = \frac{X - X_j}{X_i - X_j} = \frac{X - 0}{L - 0} = \frac{X}{L} \quad (2.16)$$

Alors la matrice déformation-déplacement [B] sera :

$$[B] = [L] \cdot [N] = \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} L - X & X \\ L & L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Donc, en appliquant la relation (2.13) on obtient :

$$[K_e] = \int_V [B]^T \cdot [D] \cdot [B] dV = \int_0^L \begin{bmatrix} -1 \\ L \\ 1 \\ L \end{bmatrix} \cdot D \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix} \cdot A dx$$

$$\text{Ainsi } [K_e] = \frac{AE}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

L'équation (2.8) qui donne  $\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$  représente la relation entre les

forces agissant sur les extrémités de la barre et les déplacements se produisant aux nœuds, cela est écrit dans les coordonnées de la barre. Cependant il faut tenir compte des ensembles de membres faisant des angles entre eux.

Donc la matrice de transformation entre les deux repères (local de la barre et globale de la structure) sera établit comme suit :

$$T = \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

Donc  $[k_e] = \frac{AE}{L} [T]$  (2.19)

$[Ke]$  est écrite dans le repère globale de la structure.

Ayant obtenu les déplacements nodaux dans le système de coordonnées globale, il est commode de retrouver en système local pour calculer et évaluer les forces dans l'élément. Les calculs aboutissent à :

$$F_{ij} = \frac{AE}{L} [\cos \quad \sin]_{ij} \begin{Bmatrix} U_j - U_i \\ V_j - V_i \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

### II.3.Eléments de Poutre

#### II.3.1.Matrice de rigidité pour un élément Poutre

Soit l'élément poutre de la figure 2.7. L'élément admet deux nœuds avec deux ddl (une translation  $W$  et une rotation  $\theta_y$ ) par nœud.

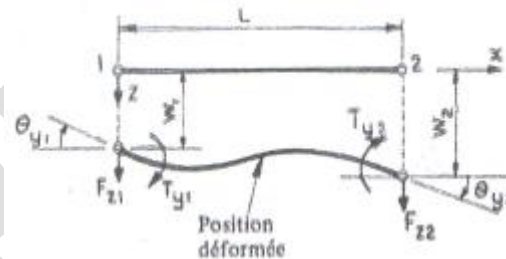


Figure 2.7. Élément Poutre

L'élément Poutre admet une section transversale uniforme faisant partie d'une structure continue. Pour un tel élément on peut utiliser le système de coordonnées de la figure 2.7.

Puisque l'élément possède 4 ddl ( $W_1, \theta_{y1}, W_2, \theta_{y2}$ ) quatre coefficient indéterminés doivent apparaitre dans le polynôme représentant le modèle du déplacement. Supposons que  $W$  soit donné par l'équation :

$$W = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \quad (2.21)$$

Ou les  $\alpha_i$  sont des coefficients inconnus. Puisque  $\theta_y = \frac{dW}{dx}$ , on obtient :

$$\theta_y = \frac{dW}{dx} = \alpha_2 + 2\alpha_3x + 3\alpha_4x^2 \quad (2.22)$$

Le vecteur de déplacement est donc donné par les équations (2.21) et (2.22) :

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} W \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

Ou  $\{\delta\} = [A]\{\alpha\}$

Ainsi  $\{\alpha\} = [A]^{-1}\{\delta\}$  (2.24)

Au nœud 1,  $x=0$  et donc  $W_1 = \alpha_1$  et  $\theta_{y1} = \alpha_2$

Au nœud 2,  $x=L$  et donc  $W_2 = \alpha_1 + \alpha_2L + \alpha_3L^2 + \alpha_4L^3$  et  $\theta_{y2} = \alpha_2 + 2\alpha_3L + 3\alpha_4L^2$

Sous forme matricielle :

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} W_1 \\ \theta_{y1} \\ W_2 \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

La matrice A est donc définie par la matrice d'ordre 4 de l'équation (2.25) qu'il faut inverser pour pouvoir calculer les constantes indéterminées  $\alpha_i$ .

Dans notre cas la forme de notre matrice est simple et on peut aisément résoudre le système d'équations. On obtient :

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_1 \\ \theta_{y1} \\ W_2 \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

Si on définit le vecteur de déformation  $\{\varepsilon\} = \frac{-d^2w}{dx^2} = -2\alpha_3 - 6\alpha_4x$  (2.27)

Sous forme matricielle :



$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -6x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

$$\text{On a : } \{\varepsilon\} = [B] \{\delta\} \quad (2.29)$$

En remplaçant  $\{\alpha\} = [A]^{-1} \{\delta\}$  dans l'équation (2.28) nous aurons :

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -6x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_1 \\ \theta_{y1} \\ W_2 \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

Ce qui donne après multiplication matricielle :

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} & -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_1 \\ \theta_{y1} \\ W_2 \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

Ainsi la matrice [B] est obtenue.

La matrice de rigidité élémentaire  $[k_e]$  est donnée par équation (2.13):

$$[K_e] = \int_v [B]^T \cdot [D] \cdot [B] dv$$

Ainsi :

$$[K_e] = \int_v [B]^T \cdot [D] \cdot [B] dv = \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \\ \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \\ \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix} EI \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} & -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix} dx$$

$$[K_e] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Pour le calcul de la contrainte, on aura :

$$[\sigma] = [D] \cdot \{\varepsilon\} = [D] \cdot [B] \{\delta\} \quad (2.33)$$

Pour l'élément de poutre 2D (bidimensionnel), c'est la combinaison entre un élément de barre et un élément de poutre. Dans ce cas, la matrice de rigidité  $[K_e]$  sera :

$$[K_e] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

## II.4. Système Treillis

Un **treillis**, ou **système triangulé**, figure (2.8) est un assemblage de barres verticales, horizontales et diagonales formant des triangles, de sorte que chaque barre subisse un effort acceptable, et que la déformation de l'ensemble soit modérée.



Figure 2.8. Pont en treillis

Cette structure est devenue courante en construction à partir de la révolution industrielle, pour des ponts, fuselages d'avion, etc. En effet, un tel assemblage allie résistance, rigidité et légèreté, et permet d'utiliser des éléments normalisés (barres) ; par ailleurs, le treillis peut éventuellement être préassemblé.

Lorsqu'un treillis est soumis à un effort, certaines parties de l'assemblage sont mises en compression et d'autres parties en tension. Par exemple, dans le cas d'un pont en treillis, les poutres supérieures sont comprimées, les poutres inférieures sont tendues, et les pièces en diagonale évitent le vrillage des poutres principales.

Les axes des barres concourent en *nœuds* ; ce sont les points d'assemblage des barres. D'un point de vue mécanique, les nœuds sont modélisés par des articulations parfaites. Initialement, pour simplifier les calculs, les charges n'étaient appliquées qu'aux seuls nœuds; l'utilisation de la méthode des éléments finis permet de s'affranchir de cette simplification.

L'assemblage de trois, quatre, barres ou plus constitue un treillis avec  $n$  barres. Son analyse par éléments finis se mène de la même façon qu'une analyse 2D ou 3D.

La première étape consiste à déterminer la matrice de rigidité élémentaire de chaque élément dans les repères locaux de la structure ensuite faire l'assemblage des  $n$  barres. Après on applique les conditions aux limites (encastrement, déplacement, etc...) et on obtient finalement la matrice de rigidité globale réduite dans le repère globale. On applique le principe de rigidité ( $F=k.x$ ) et on résout le système d'équations pour déterminer les déplacements dans les nœuds des barres.

Les contraintes et les déformations se résous de la même façon en appliquant les formules déjà vues.

Plusieurs Problèmes types seront abordés dans les TD et Tps.