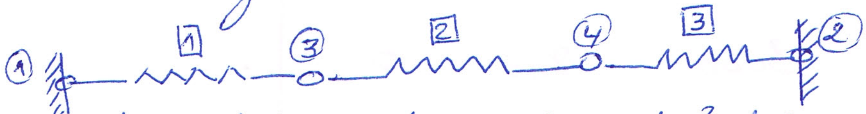
Université Batna 2.
Département de Mécanique
Master I FMP.

Solution du TD N° 01.
Méthode des éléments finis.

EXERCICE N° 01.

Soit l'assemblage de ressorts colinéaires :



$k_1 = 1000\ kN/m$ $k_2 = 2000\ kN/m$ $k_3 = 3000\ kN/m$.

La matrice de rigidité globale du système.

Pour déterminer $K_{Globale}$ il faut déterminer celle de chaque ressort, ensuite faire l'assemblage et appliquer les conditions aux limites.
Pour simplifier il faut appliquer la méthode de superposition.
Les matrices de rigidité élémentaires sont :

$$ke^{(1)} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1000 & -1000 \\ -1000 & 1000 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} k_{11} & -k_{13} \\ -k_{13} & k_{11} \end{bmatrix}$$ $ke^{(1)}$ entre noeuds 1 et 3.

$$ke^{(2)} = \begin{bmatrix} k_{33} & k_{34} \\ k_{34} & k_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 2000 & -2000 \\ -2000 & 2000 \end{bmatrix} \end{array}$$ $ke^{(2)}$ entre 3 et 4

$$ke^{(3)} = \begin{bmatrix} 3000 & -3000 \\ -3000 & 3000 \end{bmatrix}$$ $ke^{(3)}$ entre noeuds 4 et 2.

Faisant l'assemblage des 3 matrices de rigidité élémentaires :

Si on superpose les 3 matrices on aura :

$$K_{Globale} = \begin{bmatrix} 1000 & -1000 & 0 & 0 \\ -1000 & 1000 + 2000 & -2000 & 0 \\ 0 & -2000 & 2000 + 3000 & -3000 \\ 0 & 0 & -3000 & 3000 \end{bmatrix}$$

$$K_{Globale} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 4 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1000 & -1000 & 0 & 0 \\ -1000 & 3000 & -2000 & 0 \\ 0 & -2000 & 5000 & -3000 \\ 0 & 0 & -3000 & 3000 \end{bmatrix} \end{array}$$

Appliquons les Conditions aux limites

Nous remarquons que les noeuds 1 et 2 sont totalement encastrés donc bloqués, Aucun Mouvement n'est autorisé, donc on élimine les 2 déplacements des Noeuds 1 et 2 de la matrice de rigidité c'est à dire les lignes qui correspondent aux noeuds 1 et 2 et leur colonnes aussi, Ainsi nous obtenons

$$K_{Globale} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 4 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \cancel{1000} & \cancel{-1000} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{-1000} & \cancel{3000} & \cancel{-2000} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & -2000 & 5000 & \cancel{-3000} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-3000} & \cancel{3000} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} \cancel{1000} & \cancel{-1000} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{-1000} & \begin{bmatrix} 3000 & -2000 \\ -2000 & 5000 \end{bmatrix} & & \cancel{0} \\ \cancel{0} & & & \cancel{3000} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-3000} & \cancel{3000} \end{bmatrix}$$

la matrice de rigidité Globale sera :

$$K_{Globale} = \begin{bmatrix} 3\omega_0 & -2\omega_0 \\ -2\omega_0 & 5\omega_0 \end{bmatrix}.$$

Appliquons maintenant l'équation qui relie les forces aux déplacement $K\cancel{X}=F$ pour déterminer les déplacements aux noeuds ③ et ④.

le vecteur forces est $F = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix}$, en le metant comme la numérotation du système :

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_2 \end{Bmatrix} = [K_G]\{U\}.$$

avec $\{U\}$: vecteur de déplacements nodaux.

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_2 \end{Bmatrix},$$

Ainsi :
$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\omega_0 & -1\omega_0 & 0 & 0 \\ -1\omega_0 & 3\omega_0 & -2\omega_0 & 0 \\ 0 & -2\omega_0 & 5\omega_0 & -3\omega_0 \\ 0 & 0 & -3\omega_0 & 3\omega_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad — (1)$$

Après C.L.

$$\begin{Bmatrix} F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3000 & -2000 \\ -2000 & 5000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}.$$ Avec $F_3 = 0$.

$F_4 = 5000\ lb$.

On a : $0 = 3000\, u_3 - 2000\, u_4 \rightarrow 3000\, u_3 = 2000\, u_4$.

$$\rightarrow \boxed{u_3 = \frac{2}{3} u_4}$$

$$5000 = -2000\, u_3 + 5000\, u_4 \rightarrow 5000 = -2000 \frac{2}{3} u_4 + 5000\, u_4.$$

$$\rightarrow 5 = \left(5 - \frac{4}{3}\right) u_4 = \frac{11}{3} u_4.$$

$$\rightarrow \boxed{u_4 = +\frac{15}{11}\ m}$$

Ainsi $\boxed{u_3 = \frac{2}{3}\frac{15}{11} = \frac{30}{33} = \frac{10}{11}\ m}$

Les forces de réaction dans les noeuds 1 et 2

Revenons à la résolution du système 1 :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 & -1000 & 0 & 0 \\ -1000 & 3000 & -2000 & 0 \\ 0 & -2000 & 5000 & -3000 \\ 0 & 0 & -3000 & 3000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_2 \end{Bmatrix}.$$

$$F_1 = \cancel{1000\, u_1}^{\,0} - 1000\, u_3 = -1000\, u_3 = -1000 \frac{10}{11} = -\frac{10000}{11}\ kN.$$

$$\boxed{F_1 = -\frac{10000}{11}\ kN}$$

$$F_3 = \cancel{-1000\, u_1}^{\,0} + 3000\, u_3 - 2000\, u_4 + 0\, u_2 = 0 + 3000 \cdot \frac{10}{11} - 2000 \frac{15}{11}$$

$$\boxed{F_3 = \frac{30000}{11} - \frac{30000}{11} = 0}$$

$$F_4 = 0\,u_1 - 2000\,u_3 + 5000\,u_4 - 3000\,u_2 .$$

$$F_4 = -2000\,\frac{10}{11} + 5000\,\frac{15}{11} - 3000 \cdot \cancel{0}$$

$$\boxed{F_4 = -\frac{20000}{11} + \frac{75000}{11} = \frac{55000}{11}\ kN .}$$

$$F_2 = -3000\,u_4 + 3000\,\cancel{u_2} = -3000 \cdot \frac{15}{11} = \boxed{-\frac{45000}{11}\ kN = F_e}$$

Nous remarquons que la somme des réactions F_1 et F_2 est égale à la magnitude de la force F_4 mais de sens opposé.

<u>Les forces dans chaque ressort.</u>

Nous allons utiliser chaque élément de ressort pour calculer les forces dans chaque ressort :

Elément ①
$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 & -1000 \\ -1000 & 1000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 & -1000 \\ -1000 & 1000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{10}{11} \end{Bmatrix} .$$

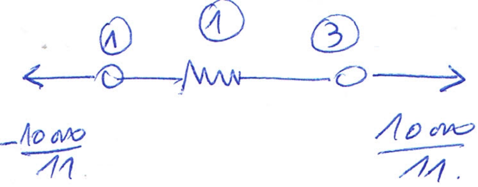
$$\rightarrow f_1 = -\frac{10000}{11}\ kN \ ; \quad f_3 = \frac{10000}{11}\ kN .$$

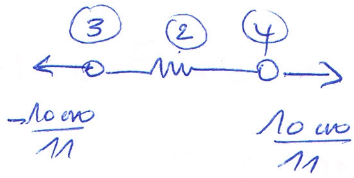
Elément ②
$$\begin{Bmatrix} f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000 & -2000 \\ -2000 & 2000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{10}{11} \\ \frac{15}{11} \end{Bmatrix}$$

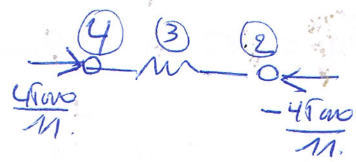
$$\rightarrow f_3 = -\frac{10000}{11}\ kN, \quad f_4 = \frac{10000}{11}\ kN .$$

Elément ③
$$\begin{Bmatrix} f_4 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3000 & -3000 \\ -3000 & 3000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{15}{11} \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow f_4 = \frac{45000}{11}\ kN, \quad f_2 = -\frac{45000}{11}\ kN .$$







Exercice N° 3.

Soit le Treillis Plan Composé de 3 éléments bars.

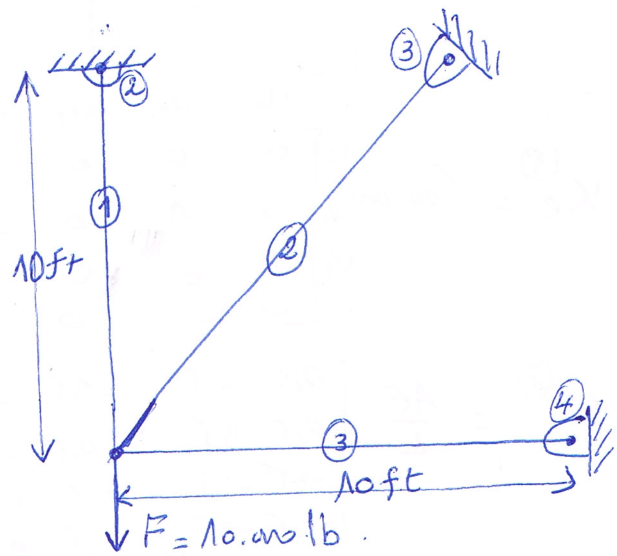
A titre indicatif :

1 lb = 0,454 kg.

1 ft = 12 inch

1 inch = 0,025 m.

1 Psi = 0,00689 MPa.



Les données du Problème Sont ;

$E = 10^6 \times 30$ Psi.

$L = 10$ feet $= 120$ in.

la Section $A = 2\ in^2$. pour tous les éléments.

Pour déterminer les déplacements aux noeud ① il faut appliquer la formule qui relie les forces aux déplacements :

$F = K.X.$

Avec : {F} : vecteur forces ; K : rigidité globale, X : vect. déplacem

Ainsi les matrices de rigidité d'un élément barre est :

$$K_e = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$ avec c : cosinus. s : sinus.

Matrices de rigidité élémentaire du système

Membres	θ	Cos	sin	$\cos^2$	$\sin^2$	C.S.
①	90°	0	1	0	1	0
②	45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	1/2	1/2
③	0°	1	0	1	0	0

$$Ke^{(1)} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} c^2 & cs & & \\ sc & s^2 & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \rightarrow \quad \text{Si } \frac{AE}{L} = 500.000 \quad \text{et } L = 120 \text{ in}$$

$$Ke^{(1)} = 500.000 \begin{array}{c|cccc} & u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \\ \hline u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$Ke^{(2)} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & -0,5 & -0,5 \\ 0,5 & 0,5 & -0,5 & -0,5 \\ -0,5 & -0,5 & 0,5 & 0,5 \\ -0,5 & -0,5 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

avec $L = 120 \times \cos 45 = 84,852$ m

$$\frac{AE}{L} = \frac{AE}{120 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$Ke^{(2)} = 500.000 \times \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{array}{cccc|c} u_1 & v_1 & u_3 & v_3 & \\ \hline 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & u_1 \\ +1/2 & +1/2 & -1/2 & -1/2 & v_1 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & u_3 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & v_3 \end{array}$$

$$Ke^{(3)} = \frac{AE}{L} \begin{array}{cccc|c} u_1 & v_1 & u_4 & v_4 & \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 & u_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & u_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_4 \end{array}$$

La matrice de rigidité globale :

		(1) u_1	(1) v_1	(2) u_2	(2) v_2	(3) u_3	(3) v_3	(4) u_4	(4) v_4
(1)	u_1	$K_1+K_2+K_3$	$K_1+K_2+K_3$	K_1	K_1	K_2	K_2	K_3	K_3
	v_1	$K_1+K_2+K_3$	$K_1+K_2+K_3$	K_1	K_1	K_2	K_2	K_3	K_3
(2)	u_2	K_1	K_1	K_1	K_1	0	0	0	0
	v_2	K_1	K_1	K_1	K_1	0	0	0	0
(3)	u_3	K_2	K_2	0	0	K_2	K_2	0	0
	v_3	K_2	K_2	0	0	K_2	K_2	0	0
(4)	u_4	K_3	K_3	0	0	0	0	K_3	K_3
	v_4	K_3	K_3	0	0	0	0	K_3	K_3

$$
K_{Globale} = 500.000 \begin{array}{cccccccccc}
 & u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 & \\
\end{array}
$$

$$
K_{Globale} = 500.000 \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc}
1,354 & -0,354 & 0 & 0 & -0,354 & -0,354 & -1 & 0 \\
-0,354 & 1,354 & 0 & -1 & -0,354 & -0,354 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
-0,354 & -0,354 & 0 & 0 & -0,354 & -0,354 & 0 & 0 \\
-0,354 & -0,354 & 0 & 0 & -0,354 & -0,354 & 0 & 0 \\
\hline
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{array}
$$

Appliquons les conditions aux limites, noeuds 2, 3, et 4 totalement encastrés ($u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4 = 0$).

$$
\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ \cancel{F_{2x}} \\ \cancel{F_{2y}} \\ \cancel{F_{3x}} \\ \cancel{F_{3y}} \\ \cancel{F_{4x}} \\ \cancel{F_{4y}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{Globale} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ \cancel{u_4} \\ \cancel{v_4} \end{Bmatrix}
$$

$$
\Rightarrow \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \end{Bmatrix} = 500.000 \begin{bmatrix} 1,354 & -0,354 \\ -0,354 & 1,354 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix}
$$

Après résolution du système on aura :

$$
\boxed{\begin{aligned} u_1 &= -0,414 \times 10^{-2} \text{ in} \\ v_1 &= 1,59 \times 10^{-2} \text{ in} \end{aligned}}
$$

2) Les Contraintes dans chaque element

$$\sigma^{①} = \frac{E}{L}\begin{bmatrix} C. & S \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 - u_1 \\ v_2 - v_1 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma^{①} = \frac{30 \times 10^6}{120}\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 - 0{,}414 \times 10^{-2} \\ 0 + 1{,}59 \times 10^{-2} \end{Bmatrix} \simeq 3975 \text{ Psi}.$$

$$\sigma^{②} = \frac{30 \times 10^6}{120} \times \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 + 0{,}414 \times 10^{-2} \\ 0 - 1{,}59 \times 10^{-2} \end{Bmatrix}.$$

$$\sigma^{②} \simeq 1469 \text{ Psi}.$$

$$\sigma^{③} \simeq 1035 \text{ Psi}.$$

<u>EXERCICE N° 2</u> : à faire par les Etudiants.