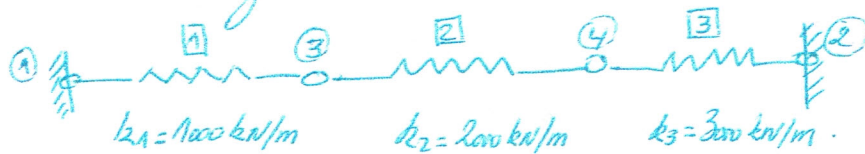


Solution du TD N° 01
Méthode des éléments finis

EXERCICE N° 01

Soit l'assemblage de ressorts colinéaires :



La matrice de rigidité globale du système :

Pour déterminer $K_{globale}$ il faut déterminer celle de chaque ressort, ensuite faire l'assemblage et appliquer les conditions aux limites.

Pour simplifier il faut appliquer la méthode de superposition -

les matrices de rigidité élémentaires sont :

$$k_e^{(1)} = \begin{matrix} \textcircled{1} & & \textcircled{3} \\ \textcircled{1} & \begin{bmatrix} 1000 & -1000 \\ -1000 & 1000 \end{bmatrix} & \textcircled{3} \\ & & \end{matrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & -k_{13} \\ -k_{13} & k_{11} \end{bmatrix} \quad k_e^{(1)} \text{ entre nœuds } \textcircled{1} \text{ et } \textcircled{3}$$

$$k_e^{(2)} = \begin{matrix} & & \textcircled{3} & & \textcircled{4} \\ & \begin{bmatrix} k_{33} & k_{34} \\ k_{34} & k_{33} \end{bmatrix} & & & \\ & & & \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} & \\ & & \textcircled{3} & & \textcircled{4} \\ & & & & \begin{bmatrix} 2000 & -2000 \\ -2000 & 2000 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad k_e^{(2)} \text{ entre } \textcircled{3} \text{ et } \textcircled{4}$$

$$k_e^{(3)} = \begin{matrix} & & \textcircled{4} & & \textcircled{2} \\ & \begin{bmatrix} 3000 & -3000 \\ -3000 & 3000 \end{bmatrix} & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{matrix} \quad k_e^{(3)} \text{ entre nœuds } \textcircled{4} \text{ et } \textcircled{2}$$

faisant l'assemblage des 3 matrices de rigidité élémentaires :

Si on suppose les 3 matrice on aura :

$$K_{globale} = \begin{bmatrix} 1000 & -1000 & 0 & 0 \\ -1000 & 1000 + 2000 & -2000 & 0 \\ 0 & -2000 & 2000 + 3000 & -3000 \\ 0 & 0 & -3000 & 3000 \end{bmatrix}$$

$$K_{reduc} = \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \\ \textcircled{2} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1000 & -1000 & 0 & 0 \\ -1000 & 3000 & -2000 & 0 \\ 0 & -2000 & 5000 & -3000 \\ 0 & 0 & -3000 & 3000 \end{bmatrix}$$

Appliquons les Conditions aux limites

Nous remarquons que les nœuds $\textcircled{1}$ et $\textcircled{2}$ sont totalement encastres donc bloqués, Aucun mouvement n'est autorisé, donc on élimine les 2 déplacements des nœuds $\textcircled{1}$ et $\textcircled{2}$ de la matrice de rigidité c'est à dire les lignes qui correspondent aux nœuds $\textcircled{1}$ et $\textcircled{2}$ et leur colonnes aussi, Ainsi nous obtenons :

$$K_{reduc} = \begin{matrix} \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \\ \textcircled{2} \end{matrix} \begin{matrix} \textcircled{1} & \textcircled{3} & \textcircled{4} & \textcircled{2} \\ \begin{bmatrix} 1000 & -1000 & 0 & 0 \\ -1000 & 3000 & -2000 & 0 \\ 0 & -2000 & 5000 & -3000 \\ 0 & 0 & -3000 & 3000 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \\ \textcircled{2} \end{matrix} \begin{matrix} \textcircled{3} & \textcircled{4} \\ \begin{bmatrix} 3000 & -2000 \\ -2000 & 5000 \end{bmatrix} \\ \textcircled{2} \\ \begin{bmatrix} 0 & -3000 \\ 0 & 3000 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

la matrice de rigidité Globale sera :

$$K_{\text{globale}} = \begin{bmatrix} 3000 & -2000 \\ -2000 & 5000 \end{bmatrix}$$

Appliquons maintenant l'équation qui relie les forces aux déplacements $KX=F$ pour déterminer les déplacements aux nœuds (3) et (4).

le vecteur forces est $F = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix}$, en le mettant comme la numérotation du système :

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_2 \end{Bmatrix} = [K_G] \{U\}$$

avec $\{U\}$: vecteur de déplacements nodaux.

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_2 \end{Bmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 & -1000 & 0 & 0 \\ -1000 & 3000 & -2000 & 0 \\ 0 & -2000 & 5000 & -3000 \\ 0 & 0 & -3000 & 3000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad \text{--- (1)}$$

Après C.L.

$$\begin{cases} F_3 \\ F_4 \end{cases} = \begin{bmatrix} 3000 & -2000 \\ -2000 & 5000 \end{bmatrix} \begin{cases} u_3 \\ u_4 \end{cases} \quad \text{Avec } F_3 = 0 \\ F_4 = 5000 \text{ lb.}$$

Donc: $0 = 3000 u_3 - 2000 u_4 \rightarrow 3000 u_3 = 2000 u_4$

$$\rightarrow \boxed{u_3 = \frac{2}{3} u_4}$$

$$5000 = -2000 u_3 + 5000 u_4 \rightarrow 5000 = -2000 \frac{2}{3} u_4 + 5000 u_4$$

$$\rightarrow 5 = \left(5 - \frac{4}{3}\right) u_4 = \frac{11}{3} u_4$$

$$\rightarrow \boxed{u_4 = + \frac{15}{11} \text{ m}}$$

Ainsi $\boxed{u_3 = \frac{2}{3} \frac{15}{11} = \frac{30}{33} = \frac{10}{11} \text{ m}}$

Les forces de réaction dans les nœuds ① et ②

Revenons à la résolution du système ① :

$$\begin{cases} F_1 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_2 \end{cases} = \begin{bmatrix} 1000 & -1000 & 0 & 0 \\ -1000 & 3000 & -2000 & 0 \\ 0 & -2000 & 5000 & -3000 \\ 0 & 0 & -3000 & 3000 \end{bmatrix} \begin{cases} u_1 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_2 \end{cases}$$

$$F_1 = \overset{0}{1000} u_1 - 1000 u_3 = -1000 u_3 = -1000 \frac{10}{11} = -\frac{10000}{11} \text{ kN}$$

$$\boxed{F_1 = -\frac{10000}{11} \text{ kN}}$$

$$F_3 = \overset{0}{-1000} u_1 + 3000 u_3 - 2000 u_4 + 0 u_2 = 0 + 3000 \frac{10}{11} - 2000 \frac{15}{11}$$

$$\boxed{F_3 = \frac{30000}{11} - \frac{30000}{11} = 0}$$

$$F_4 = 0 \cdot u_1 - 2000 \cdot u_3 + 5000 \cdot u_4 - 3000 \cdot u_2$$

$$F_4 = -2000 \frac{10}{11} + 5000 \frac{15}{11} - 3000 \cdot 0$$

$$F_4 = -\frac{20000}{11} + \frac{75000}{11} = \frac{55000}{11} \text{ kN.}$$

$$F_2 = -3000 \cdot u_4 + 3000 \cdot u_2 = -3000 \cdot \frac{15}{11} = -\frac{45000}{11} \text{ kN} = F_e$$

Nous remarquons que la somme des réactions F_1 et F_2 est égale à la magnitude de la force F_4 mais de sens opposé. les forces dans chaque ressort.

Nous allons utiliser chaque élément de ressort pour calculer les forces dans chaque ressort:

Élément ①
$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 & -1000 \\ -1000 & 1000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 & -1000 \\ -1000 & 1000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{10}{11} \end{Bmatrix}$$

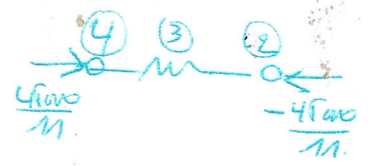
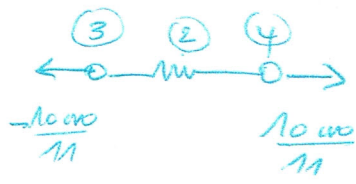
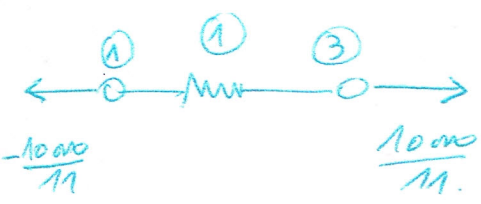
$\rightarrow f_1 = -\frac{10000}{11} \text{ kN}, f_3 = \frac{10000}{11} \text{ kN.}$

Élément ②
$$\begin{Bmatrix} f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000 & -2000 \\ -2000 & 2000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{10}{11} \\ \frac{15}{11} \end{Bmatrix}$$

$\rightarrow f_3 = -\frac{10000}{11} \text{ kN}, f_4 = \frac{10000}{11} \text{ kN.}$

Élément ③
$$\begin{Bmatrix} f_4 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3000 & -3000 \\ -3000 & 3000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{15}{11} \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow$$

$\rightarrow f_4 = \frac{45000}{11} \text{ kN}, f_2 = -\frac{45000}{11} \text{ kN.}$



Exercice N° 3.

Soit le Treillis Plan Composé de 3 éléments bars.

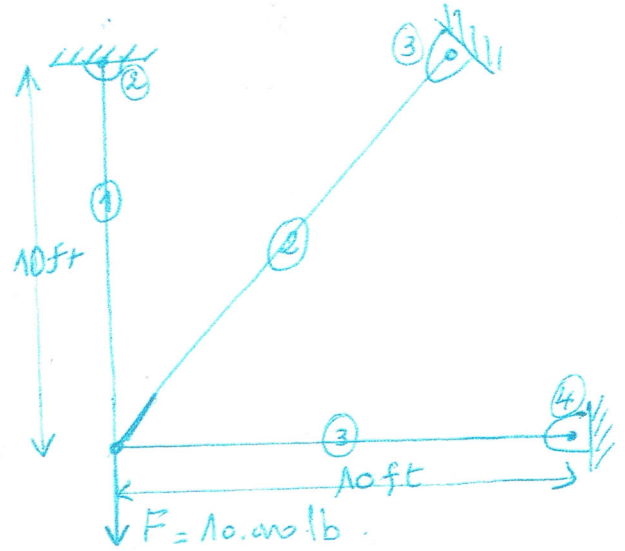
A titre indicatif :

$$1 \text{ lb} = 0,454 \text{ kg}$$

$$1 \text{ ft} = 12 \text{ inch}$$

$$1 \text{ inch} = 0,0254 \text{ m}$$

$$1 \text{ Psi} = 0,00689 \text{ MPa}$$



Les données du problème sont :

$$E = 10^6 \times 30 \text{ Psi}$$

$$L = 10 \text{ feet} = 120 \text{ in}$$

la section $A = 2 \text{ in}^2$ pour tous les éléments.

Pour déterminer les déplacements aux nœuds ① il faut appliquer la formule qui relie les forces aux déplacements :

$$F = K \cdot X$$

Avec : $\{F\}$: vecteur forces ; K : rigidité globale, X : vect. déplacements

Ainsi les matrices de rigidité d'un élément barre st :

$$K_e = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \quad \text{avec } c : \text{cosinus} \\ s : \text{sinus}$$

Matrices de rigidité élémentaire des systèmes

Membres	θ	cos	sin	\cos^2	\sin^2	c.s.
①	90°	0	1	0	1	0
②	45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$
③	0°	1	0	1	0	0

$$K_e^{(1)} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs \\ sc & s^2 \end{bmatrix} \rightarrow \delta \cdot \frac{AE}{L} = 500,000 \text{ et } L = 120 \text{ in}$$

$$K_e^{(1)} = 500,000 \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \\ u_1 & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & 0 & 1 & 0 \\ u_2 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_e^{(2)} = \frac{AE}{L_2} \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & -0,5 & -0,5 \\ 0,5 & 0,5 & -0,5 & -0,5 \\ -0,5 & -0,5 & 0,5 & 0,5 \\ -0,5 & -0,5 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \text{ avec } L_2 = 120 / \cos 45 = 169,732 \text{ m}$$

$$K_e^{(2)} = 500,000 \times \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} L_1 & v_1 & L_3 & v_3 \\ A/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ +1/2 & +1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \end{matrix}$$

$$K_e^{(3)} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_4 & v_4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ u_4 \\ v_4 \end{matrix}$$

La matrice de rigidité globale :

	①		②		③		④	
	u_1	v_1	u_2	v_2	u_3	v_3	u_4	v_4
① u_1	$K_1 + K_2 + K_3$	$K_1 + K_2 + K_3$	K_1	K_1	K_2	K_2	K_3	K_3
v_1	$K_1 + K_2 + K_3$	$K_1 + K_2 + K_3$	K_1	K_1	K_2	K_2	K_3	K_3
u_2	K_1	K_1	K_1	K_1	0	0	0	0
v_2	K_1	K_1	K_1	K_1	0	0	0	0
③ u_3	K_2	K_2	0	0	K_2	K_2	0	0
v_3	K_2	K_2	0	0	K_2	K_2	0	0
u_4	K_3	K_3	0	0	0	0	K_3	K_3
④ v_4	K_3	K_3	0	0	0	0	K_3	K_3

$K_{Globale} = 500.000.$

u_1	v_1	u_2	v_2	u_3	v_3	u_4	v_4
1,354	-0,354	0	0	-0,354	-0,354	-1	0
-0,354	1,354	0	-1	-0,354	-0,354	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	-1	0	-1	0	0	0	0
-0,354	-0,354	0	0	-0,354	-0,354	0	0
-0,354	-0,354	0	0	-0,354	-0,354	0	0
-1	0	0	0	0	0	-1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Appliquons les conditions aux limites, noeuds 2, 3, et 4 totalement encastrés ($u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4 = 0$).

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{Globale} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \end{Bmatrix} = 500.000 \begin{bmatrix} 1,354 & -0,354 \\ -0,354 & 1,354 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix}$$

Après résolution du système on aura :

$$\begin{aligned} u_1 &= -0,414 \times 10^{-2} \text{ in} \\ v_1 &= 1,59 \times 10^{-2} \text{ in} \end{aligned}$$

2) les contraintes dans chaque element

$$\sigma^{(1)} = \frac{E}{L} [C. S] \begin{Bmatrix} u_2 - u_1 \\ v_2 - v_1 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma^{(1)} = \frac{30 \times 10^6}{120} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 - 0,414 \times 10^{-2} \\ 0 + 1,159 \times 10^{-2} \end{Bmatrix} \approx 3975 \text{ Psi}$$

$$\sigma^{(3)} = \frac{30 \times 10^6}{120} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 + 0,414 \times 10^{-2} \\ 0 - 1,159 \times 10^{-2} \end{Bmatrix}$$

$$\sigma^{(3)} \approx 1469 \text{ Psi}$$

$$\sigma^{(3)} \approx 1035 \text{ Psi}$$

EXERCICE N° 2 : à faire par les Etudiants