Exemple 3

$$\max_u \int_0^1 [y(t)+u(t)]\,dt$$

sujette à

$$y'(t) = 1 - (u(t))^2$$
$$y(0) = 1$$

Le hamiltonien est

$$H(t,y,u,\lambda) = y + u + \lambda(1-u^2)$$

Condition d'optimalité

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 = 1 - 2\lambda u \Rightarrow u^* = \frac{1}{2\lambda}$$

Equation adjointe et condition de transversalité

$$\lambda' = -\frac{\partial H}{\partial y} = -1$$

$$\lambda(1) = 0.$$

On trouve $\lambda(t) = 1 - t$

L'état optimal est donné par

$$\begin{cases} y^{*\prime} = 1 - u^{*2} \\ y^*(0) = 1 \end{cases}$$

D'où $y^*(t) = t - \dfrac{5}{4(1-t)} + \dfrac{5}{4}$

et $u^*(t) = \dfrac{1}{2(1-t)}$

Calculons la valeur de la fonction coût en (y^*, u^*)

$$\int_0^1 [y^*(t) + u^*(t)]\,dt = \int_0^1 \left[t + \frac{5}{4} + \frac{1}{4(1-t)}\right] dt = +\infty$$

Donc il n'y a pas de contrôle optimal, puisque on considère des problèmes avec un optimum fini. Dans cet exemple, y^* et u^* sont non bornés au pt $t = 1$.

1.2. Existence de contrôle optimal

1.2.1. Théorème

Supposons que pour le problème (1.3), les fcts de contrôles sont intégrables au sens de Lebesgue sur $[t_0, t_1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Supposons en plus que $g(t,y,u)$ est convexe en u et qu'il existe des constantes $C_4, C_1, C_2, C_3 > 0$ et $\beta > 1$ telles que

$$f(t,y,u) = \alpha(t,y) + \beta(t,y)u$$

$$|f(t,y,u)| \leq C_1(1 + |y| + |u|)$$

$$|f(t,y_1,u) - f(t,y,u)| \leq C_2|y_1 - y|(1 + |u|)$$

$$g(t,y,u) \geq C_3|u|^\beta - C_4$$

pour tout $t \in [t_0, t_1]$, y, y_1, u dans $\mathbb{R}$.
Alors il existe un contrôle optimal u^* maximisant $J(u)$ avec $J(u^*)$ finie.
Pour le problème de minimisation f devrait être concave et l'inégalité sur g serait inversée.

1.3 Principe d'optimalité

1.3.1. Théorème

Soient u^* un contrôle optimal, et y^* l'état correspondant, pour le problème

$$\max_u J(u) = \int_{t_0}^{t_1} g(t, y(t), u(t))\,dt$$

sujette à

$$(1.3.1)\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), u(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Soit $\hat{t} \in]t_0, t_1[$. Alors les fonctions restreintes $\hat{u}^* = u^*|_{[\hat{t}, t_1]}$, $\hat{y}^* = y^*|_{[\hat{t}, t_1]}$ forment une paire optimale pour le problème restreint.

$$\max_u \hat{J}(u) = \max_u \int_{\hat{t}}^{t_1} g(t, y(t), u(t))\,dt$$

sujette à

$$(1.3.2)\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), u(t)) \\ y(\hat{t}) = y^*(\hat{t}). \end{cases}$$

En plus si u^* est l'unique contrôle optimal pour (1.3.1), alors u^* est l'unique contrôle optimal pour (1.3.2).

Ce théorème tient aussi pour des problèmes de minimisation.

1.3.2 Exemple

$$\min_u \int_0^2 \left[y(t) + \frac{1}{2}(u(t))^2 \right] dt$$

sujette à

$$y'(t) = y(t) + u(t)$$

$$y(0) = \frac{1}{2}e^2 - 1$$

On résoud ce problème sur $[0,2]$ puis sur $[1,2]$.

Le hamiltonien est donné par

$$H(t,y,u) = y + \frac{1}{2}u^2 + y\lambda + u\lambda$$

L'equation adjointe et la condition de transversalité sont données par

$$\lambda' = -\frac{\partial H}{\partial y} = -1 - \lambda$$

$$\lambda(2) = 0$$

Donc $\lambda(t) = e^{2-t} - 1$

et de la condition d'optimalité

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} = u + \lambda$$

on obtient $u^* = -e^{2-t} + 1$

L'état correspondant est

$$y^* = \frac{1}{2}e^{2-t} - 1$$

Maintenant considérons le même problème sur $[1, 2]$, c.a.d

$$\min_u \int_1^2 \left[y(t) + \frac{1}{2}(u(t))^2\right] dt$$

sujette à

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) + u(t) \\ y(1) = \frac{1}{2}e - 1 \end{cases}$$

Le hamiltonien, l'équation adjointe et la condition de transversalité restent les mêmes. Utilisant la condition initiale

$$y(1) = \frac{1}{2}e - 1$$

on obtient

$$y^*(t) = \frac{1}{2}e^{2-t} - 1$$

1.3.3 Exemple

Considérons le même problème que ci-dessus mais sur $[0, 1]$;

$$\min_u \int_0^1 \left[y(t) + (u(t))^2\right] dt$$

sujette à

$$y'(t) = y(t) + u(t)$$
$$y(0) = \frac{1}{2}e^2 - 1$$

Le hamiltonien est le même, donc l'équation adjointe et la conditions d'optimalité ne changent pas. Cependant, la condition de transversalité est différente,

$$\begin{cases} \lambda'(t) = -1-\lambda(t) \\ \lambda(1) = 0 \end{cases}$$

donc $\lambda(t) = e^{1-t} - 1$

et $u^* = -\lambda(t) = 1 - e^{1-t}$

L'état correspondant est $y^* = \frac{1}{2}e^{1-t} - 1 + \frac{1}{2}(e^{2}-e)e^{t}$

Remarquer que cette paire optimale est différente à celle trouvée ci-dessus.

1.4. Le hamiltonien et les problèmes autonomes

1.4.1. Théorème

Le hamiltonien est une fct continue, lipschitisienne par rapport à t sur la trajectoire optimale.

1.4.2 Exemples

Exemple 1 (Exemple 2 page 13)

On a

Le hamiltonien est le même, donc l'équation adjointe et la conditions d'optimalité ne changent pas. Cependant, la condition de transversalité est différente,

$$\begin{cases} \lambda'(t) = -1 - \lambda(t) \\ \lambda(1) = 0 \end{cases}$$

donc $\lambda(t) = e^{1-t} - 1$

et $u^* = -\lambda(t) = 1 - e^{1-t}$

L'état correspondant est $y^* = \frac{1}{2} e^{1-t} - 1 + \frac{1}{2}(e^2 - e)e^t$

Remarquer que cette paire optimale est différente à celle trouvée ci-dessus.

1.4. Le hamiltonien et les problèmes autonomes

1.4.1. Théorème

Le hamiltonien est une fct continue, lipschitisienne par rapport à t sur la trajectoire optimale.

1.4. 2 Exemples

Exemple 1 (Exemple 2 page 13)

On a

$$H(t, y^*, u^*, \lambda) = t u^{*2} + t^2 y^* - \lambda u^*$$
$$= t\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}t^3\right)^2 + t^2\left(\frac{1}{18}t^3 - \frac{4}{3}\ln t + \frac{17}{18}\right)$$
$$- \frac{1}{27}\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}t^3\right)^2$$

Exemple 2

$$\min_u \frac{1}{2}\int_0^1 \left[3(y(t))^2 + (u(t))^2\right] dt$$

sujette à

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) + u(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Le hamiltonien pour ce problème est

$$H(t, y, u, \lambda) = \frac{3}{2}y^2 + \frac{1}{2}u^2 + \lambda y + \lambda u$$

Condition d'optimalité

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow u + \lambda = 0 \Rightarrow u^* = -\lambda$$

L'équation adjointe et la condition de transversalité sont données par

$$\lambda' = -\frac{\partial H}{\partial y} = -3y - \lambda$$

$$\lambda(1) = 0$$

On trouve $$y(t) = \frac{3e^{-4}}{3e^{-4}+1}e^{2t} + \frac{1}{3e^{-4}+1}e^{-2t}$$

$$\lambda(t) = -\frac{3e^{-4}}{3e^{-4}+1}e^{2t} + \frac{3}{3e^{-4}+1}e^{-2t}$$

Donc

$$\cancel{\text{Lhs}} \quad u^*(t) = \frac{3e^{-4}}{3e^{-4}+1}e^{2t} - \frac{3}{3e^{-4}+1}e^{-2t}$$

$$y^*(t) = \frac{3e^{-4}}{3e^{-4}+1}e^{2t} + \frac{3}{3e^{-4}+1}e^{-2t}$$

et $H(t, y^*, u^*, \lambda) = \dfrac{24e^{-4}}{(3e^{-4}+1)^2}$

et remarquer qu'il est constant.

1.4.3 Def

Un problème de contrôle optimal est dit autonome s'il ne dépend pas explicitement de t, c.a.d. si f et g ne dépendent pas explicitement de t.

1.4.4. Théorème

Si un problème de contrôle optimal est autonome, alors son hamiltonien est une fonction constante le long de la trajectoire optimale, c.a.d

$$H(t, y^*, u^*, \lambda) = C^{te}.$$