1.5. Cas de la fonction objectif dépendante de l'état final

Jusqu'à maintenant on a considéré seulement le cas où la fonction objectif ne dépend pas de l'état final. Cependant, il y a des situations où ce cas peut se produire.

~~1.5.1.~~ Considérons le problème de contrôle optimal suivant

$$\max_u \left[\varphi(y(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} g(t, y(t), u(t))\, dt \right.$$

sujet à

$$\begin{cases} y' = f(t, y(t), u(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Procédant comme dans le paragraphe 1.2., on obtient les conditions nécessaires d'optimalité.

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial u}(t, y^*(t), u^*(t)) + \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial u}(t, y^*(t), u^*(t)) = 0 \\ \frac{d}{dt}\lambda(t) = -\frac{\partial g}{\partial y}(t, y^*(t), u^*(t)) - \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial y}(t, y^*(t), u^*(t)) \\ \lambda(t_1) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y^*(t_1)). \end{cases}$$

~~1.5.2.~~ où $(y^*(t), u^*(t))$ est la paire optimale.

$\varphi(y(t_1))$ est appelé le terme de profit.

1.5.1. Exemple

$$\min_{u} \frac{1}{2}\int_0^1 (u(t))^2 dt + (y(1))^2$$

sujet à

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) + u(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Pour cet exemple, on a

$$H(t, y(t), u(t)) = \frac{1}{2}(u(t))^2 + \lambda(t) y(t) + \lambda(t) u(t)$$

La condition d'optimalité donne

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

D'où $\quad u(t) + \lambda(t) = 0 \quad$ et donc $u^*(t) = -\lambda(t)$

L'équation adjointe est

$$\frac{d}{dt}\lambda(t) = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\lambda(t)$$

Ce qui implique que

$$\lambda(t) = Ce^{-t}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Ainsi $\quad u^*(t) = -Ce^{-t}$

et par conséquent

$$y'(t) = y(t) - Ce^{-t}$$
$$y(0) = 1$$

qui donne

$$y^*(t) = \frac{C}{2}e^{-t} + Ke^{t}$$

où K est une constante réelle

La condition de transversalité est

$$\lambda(1) = \frac{d}{dt}\varphi(y(1)) = 2y(1)$$

On a un système d'équations linéaires

$$\begin{cases} \frac{C}{2} + K = x(0) = 1 \\ Ce^{-1} + 2Ke = Ce^{-1} \end{cases}$$

ce qui donne $C = 2$ et $K = 0$.

Donc $y^*(t) = e^{-t}$, $u^*(t) = -2e^{-t}$

1.5.2. Exemple

Soit $y(t)$ le nombre des cellules tumorales au temps t avec α ~~comme~~ son facteur de croissance exponentielle, et soit $u(t)$ la concentration du médicament.

On voudrait minimiser simultanément le nombre des cellules tumorales à la fin de la période du traitement ainsi que les effets nocifs accumulés du médicament sur le corps. Le problème est

$$\min \; y(T) + \int_0^T (u(t))^2 \, dt$$

sujet à

$$\begin{cases} y'(t) = \alpha y(t) - u(t) \\ y(0) = y_0 > 0 \end{cases}$$

Ce modèle est très simple et n'est pas réel.
Le hamiltonien est donné par

$$H(t, y(t), u(t)) = |u(t)|^2 + \lambda(t)(\alpha y(t) - u(t))$$

Les conditions nécessaires d'optimalité sont

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2u - \lambda = 0 \Rightarrow u^* = \frac{\lambda}{2}$$

$$\frac{d}{dt}\lambda = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\alpha\lambda \Rightarrow \lambda = Ce^{-\alpha t}$$

Puisque $\lambda(T) = 1$, la variable adjointe est

$$\lambda(t) = e^{\alpha(T-t)}$$

Donc le contrôle optimal est

$$u^*(t) = \frac{e^{\alpha(T-t)}}{2}$$

et l'état optimal est donné par

$$\begin{cases} y'(t) = \alpha y(t) - u^*(t), \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

alors

$$y^*(t) = y_0 e^{\alpha t} + e^{\alpha T}\left(\frac{e^{-\alpha t} - e^{\alpha t}}{4\alpha}\right)$$

1.6. Cas où l'état final est fixé

Considérons le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{cases} \max_u \int_{t_0}^{t_1} g(t, y(t), u(t))\, dt \\ \text{sujet à} \quad \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), u(t)) \\ y(t_0) = y_0, \quad y(t_1) = y_1 \end{cases} \end{cases} \qquad (1.6.1)$$

La maximisation est l'ensemble des contrôles admissibles, c.a.d. l'ensemble des contrôles qui ramènent le système de l'état initial y_0 à l'état final y_1 au temps t_1

1.6.1. Théorème

Si $(y^*(t), u^*(t))$ est une paire optimale pour le problème (1.6.1), alors il existe une variable adjointe différentiable par morceaux $\lambda(t)$ et une constante λ_0, égale à 0 ou à 1, telle que

$$H(t, y^*(t), u(t), \lambda(t)) \leq H(t, y^*(t), u^*(t), \lambda(t))$$

pour tous les contrôles admissibles $u(\cdot)$ au temps t, où le hamiltonien H est donné par

$$H(t, y(t), u(t)) = \lambda_0 g(t, y(t), u(t)) + \lambda(t) f(t, y(t), u(t))$$

et $$\frac{d}{dt}\lambda(t) = -\frac{\partial}{\partial y} H(t, y^*(t), u^*(t))$$

1.6.2. Exemple

$$\min_u \int_0^1 (u(t))\, dt$$

sujet à
$$\begin{cases} y'(t) = (y(t))^2 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

Cas $\lambda_0 = 1$

$$H = u + u^2\lambda$$

$$\lambda' = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \Rightarrow \lambda = c$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow 1 + 2\lambda u^* = 0$$

Donc $u^* = -\frac{1}{2c}$

et par conséquent $y' = \frac{1}{4c^2}$

D'où $y(t) = \frac{t}{4c^2} + k$

Mais ceci ne vérifie pas les conditions aux limites $y(0) = y(1) = 0$.

Donc $\lambda_0 \neq 1$

Cas $\lambda_0 = 0$

$$H = \lambda u^2$$

$$\lambda' = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \Rightarrow \lambda = c$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2\lambda u = 0 \Rightarrow u^* = 0$$

$$y' = u^2 = 0 \Rightarrow y^*(t) = 0.$$

$$y(0) = y(1) = 0$$

1.6.3. Exemple

$$\min_u \int_0^4 \{(u(t))^2 + (y(t))\} dt$$

sujet à

$$\begin{cases} y'(t) = u(t) \\ y(0) = y(4) = 1 \end{cases}$$

Cas $\lambda_0 = 0$

$$H = \lambda u$$

$$\frac{d}{dt}\lambda(t) = -\frac{\partial H}{\partial y} \Rightarrow \frac{d\lambda(t)}{dt} = 0 \Rightarrow \lambda = c$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

Ce cas n'est pas concluant.

Cas $\lambda_0 = 1$

$$H = u^2 + y + \lambda u$$

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -1 \Rightarrow \lambda = -t + c$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow 2u + \lambda = 0 \Rightarrow u^* = -\frac{1}{2}\lambda = \frac{1}{2}(t - c)$$

L'état optimal $y^*(t)$ est donné par

$$y^*(t) = \frac{1}{4}t^2 - \frac{c}{2}t + k$$

En utilisant les conditions limites, on trouve

$k = 0$ et $c = \frac{3}{2}$.