Chapitre 3. Contrôle Optimal Quadratique Linéaire

3.1. Introduction

Considérons le système de contrôle décrit par

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \qquad (ED)$$

où :

- $A : D(A) \subset Y \longrightarrow Y$ est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $S(t)$ sur un Hilbert Y.
- B est un opérateur linéaire borné d'un espace de Hilbert U dans Y.

Soient $Q \in \mathcal{L}(Y)$, $P_0 \in \mathcal{L}(Y)$ des opérateurs auto-adjoints non-négatifs, et $R \in \mathcal{L}(U)$ un opérateur coercif.

3.1.1. Définition

Le problème de contrôle optimal quadratique linéaire (appelé aussi le problème du régulateur quadratique linéaire) ~~consiste à minimiser~~ à horizon fini consiste à minimiser la fonctionnelle

$$J_T(u) = \int_0^T \{\langle Qy(t), y(t)\rangle + \langle Ru(t), u(t)\rangle\} dt + \langle P_0 y(T), y(T)\rangle$$

sur l'ensemble des contrôles $u(\cdot) \in L^2(0,T,U)$ sous la contrainte ~~du système~~ de (E.D).

3.1.2. Définition

Le problème de contrôle optimal quadratique linéaire à horizon infini consiste à minimiser la fonctionnelle

$$J_\infty(u) = \int_0^{+\infty} \{ \langle Qy(t), y(t) \rangle + \langle Ru(t), u(t) \rangle \} dt$$

sur l'ensemble des contrôles $u(\cdot) \in L^2(0,+\infty; U)$ sous la contrainte d'équation différentielle (E.D)

3.1.3. Définition

On dit qu'un contrôle $u(\cdot) \in L^2(0,T; U)$ ($L^2(0,+\infty; U)$) est admissible si $J_T(u) < +\infty$ ($J_\infty(u) < +\infty$).

Un contrôle admissible $u^*(\cdot) \in L^2(0,T; U)$ ($u^* \in L^2(0,+\infty; U)$) est un contrôle optimal si

$$J_T(u^*) \leq J_T(u) \quad \text{pour tout } u(\cdot) \in L^2(0,T; U)$$

$$(J_\infty(u^*) \leq J_\infty(u) \text{ pour tout } u(\cdot) \in L^2(0,+\infty; U)).$$

Dans ce cas la solution y^* de (E.D) correspondante à u^* est appelée état optimal et la paire (u^*, y^*) est appelée paire optimale

3.2. Problèmes d'horizon fini

3.2.1. Théorème

Sous les hypothèses de ci-dessus et pour $y_0 \in Y$, il existe une paire optimale unique (u^*, y^*). En plus on a :

(i) $u^* \in C([0,T]; U)$ est donnée par la formule feedback

$$u^*(t) = -R^{-1} B^* P(T-t) y^*(t), \quad t \in [0,T]$$

où $P(\cdot)$ est la solution de l'équation différentielle de Riccati (auto-adjoint et non-négatif) :

$$\frac{d}{dt} P(t) = A^* P(t) + P(t) A - Q - P(t) B R^{-1} B^* P(t)$$

$$P(0) = P_0$$

(ii) $y^* \in C([0,T]; Y)$ est une solution faible de

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) - B B^* P(T-t) y(t), & t \in [0,T] \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

(iii) Le coût optimal est donné par

$$J_T(u^*) = \langle P(T) y_0, y_0 \rangle$$

3.2.2 Exemple

Considérons dans $L^2(0,1)$, le système de contrôle décrit par

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) + u(x,t), & 0<x<1,\ t>0 \\ y(x,0) = y_0(x) & 0<x<1 \\ \frac{\partial y}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial y}{\partial x}(1,t) = 0, & t>0 \end{cases}$$

Déterminons la fonction de contrôle $u(t,\cdot)$ qui minimise la fonction coût

$$J_T(u) = \int_0^1 |y(x,T)|^2 dx + \int_0^T \int_0^1 \{ |y(x,t)|^2 + |u(x,t)|^2 \} dx\, dt$$

On reformule le problème sous la forme abstraite

$$y'(t) = Ay(t) + Bu(t), \quad t>0$$

$$y(0) = y_0$$

$$J_T(u) = \|y(T)\|^2_{L^2(0,1)} + \int_0^T \{ \|y(t)\|^2_{L^2(0,1)} + \|u(t)\|^2_{L^2(0,1)} \} dt$$

où :

- $A : D(A) \subset L^2(0,1) \longrightarrow L^2(0,1)$ ~~[illegible]~~

$$Af = \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad D(A) = H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$$

est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $S(t)$ donné par $S(t)f = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{\lambda_n t} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n$

$$\lambda_0 = 0, \quad \varphi_0 = 1$$

$$\lambda_n = -n^2\pi^2, \quad \varphi_n = \sqrt{2}\cos n\pi x \qquad n = 1, 2, \dots$$

$$B : U = L^2(0,1) \longrightarrow L^2(0,1)$$
$$f \longrightarrow Bf = f$$

$Q = R = P_0 = I$ (Identité de $L^2(0,1)$)

Le contrôle optimal u^* est donné par

$$u^*(t) = -R^{-1}B^*P(T-t)$$
$$= -P(T-t)$$

où P est solution de l'équation différentielle de Riccati

$$P'(t) = A^*P(t) + P(t)A - Q - P(t)BR^{-1}B^*P(t)$$

$$P(0) = P_0$$

$P(t)$ est une solution de l'E.D. de Riccati si pour chaque $h, g \in D(A)$, la fonction $\langle P(t)h, g\rangle$ est absolument continue $(t \geq 0)$ et

$$\frac{d}{dt}\langle P(t)h, g\rangle = \langle P(t)h, Ag\rangle + \langle P(t)Ah, g\rangle$$
$$+ \langle Qh, g\rangle - \langle P(t)BR^{-1}B^*P(t)h, g\rangle$$

et pour $h = \varphi_n$, $g = \varphi_m$, l'équation de Riccati devient

$$\frac{d}{dt}\langle P(t)\varphi_n, \varphi_m\rangle = \langle P(t)\varphi_n, A\varphi_m\rangle + \langle P(t)A\varphi_n, \varphi_m\rangle$$
$$+ \langle \varphi_n, \varphi_m\rangle - \langle P(t)\varphi_n, P(t)\varphi_m\rangle$$

Remarquons que pour $y \in Y$,

$$
\begin{aligned}
P(t)y &= P(t)\left(\sum_n \langle y, \varphi_n\rangle \varphi_n\right) \\
&= \sum_n \langle y, \varphi_n\rangle P(t)\varphi_n \\
&= \sum_n \sum_m \langle y, \varphi_n\rangle \langle P(t)\varphi_n, \varphi_m\rangle \varphi_m \\
&= \sum_{n,m} P_{nm}(t)\langle y, \varphi_n\rangle \varphi_m
\end{aligned}
$$

où $\quad P_{nm}(t) = \langle P(t)\varphi_n, \varphi_m\rangle$

Alors

$$
\frac{d}{dt} P_{nm}(t) = \lambda_m P_{nm}(t) + \lambda_n P_{nm}(t) + \langle \varphi_n, \varphi_m\rangle - \langle P(t)\varphi_n, P(t)\varphi_m\rangle
$$

Mais

$$
\begin{aligned}
\langle P(t)\varphi_n, P(t)\varphi_m\rangle &= \left\langle \sum_k \langle P(t)\varphi_n, \varphi_k\rangle \varphi_k, \sum_j \langle P(t)\varphi_m, \varphi_j\rangle \varphi_j \right\rangle \\
&= \sum_k \sum_j \langle P(t)\varphi_n, \varphi_k\rangle \langle P(t)\varphi_m, \varphi_j\rangle \langle \varphi_k, \varphi_j\rangle \\
&= \sum_k P_{nk}(t) P_{mk}(t)
\end{aligned}
$$

et donc

$$
\begin{cases}
\dfrac{d}{dt} P_{nm}(t) = \lambda_m P_{nm}(t) + \lambda_n P_{nm}(t) + \langle \varphi_n, \varphi_m\rangle - \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} P_{nk}(t) P_{mk}(t) \\
P_{nm}(0) = \langle \varphi_n, \varphi_m\rangle
\end{cases}
$$

Pour $n \neq m$, $P_{mn}(0) = 0$ et $P_{mn}(t) = 0$ est l'unique solution.

Pour $n = m$, on a

$$2\lambda_n P_n(t) + 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} (P_{nk}(t))^2$$

Mais $P_{nk}(t) = 0$ pour $k \neq n$, donc

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} P_{nn}(t) = 2\lambda_n P_n(t) + 1 - (P_{nn}(t))^2 \\ P_{nn}(0) = 1 \end{cases}$$

Pour $n = 0$, $P_{nn}(t) = 1$

Pour $n \neq 0$,

$$P_{nn}(t) = \frac{(1+b_n)a_n - b_n(1+a_n)e^{\mu_n t}}{(1+a_n)e^{\mu_n t} - (1+b_n)}$$

où $a_n = -\lambda_n - \sqrt{\lambda_n^2 + 1}$, $b_n = -\lambda_n + \sqrt{\lambda_n^2 + 1}$

$\mu_n = 2\sqrt{\lambda_n^2 + 1}$

3.3. Problèmes d'horizon infini

On associe au problème de contrôle optimal quadratique linéaire à horizon infini, l'équation algébrique de Riccati

$$\langle Ay_1, Py_2\rangle + \langle Py_1, Ay_2\rangle - \langle PBR^{-1}B^*Py_1, y_2\rangle$$
$$+ \langle Qy_1, y_2\rangle = 0 \qquad \text{(ARE)}$$

$P \geq 0$ est l'inconnu, $y_1, y_2 \in D(A)$.

3.3.1 Théorème

Supposons que pour $y_0 \in Y$ arbitraire, il existe un contrôle $u(\cdot)$ tq

$$J_\infty(u(\cdot)) < +\infty$$

Alors il existe un opérateur non-négatif $\tilde{P} \in \mathcal{L}(Y)$ satisfaisant l'EAR tq $\tilde{P} \leq P$ pour une solution non-négative arbitraire P de (ARE). En plus le contrôle $u(\cdot)$ donné sous la forme feedback

$$\tilde{u}(t) = -R^{-1}B^*\tilde{P}y(t), \quad t \geq 0$$

minimise la fonctionnelle $J_\infty(u(\cdot))$.

La valeur minimale de cette fonctionnelle est égale à $\langle P\tilde{y}_0, \tilde{y}_0\rangle$.

3.3.2. Théorème

(i) Si la paire (A, B) est exponentiellement stabilisable, alors l'équation (ARE) a au moins une solution non-négative $P \in \mathcal{L}(Y)$.

(ii) Si $Q = C^*C$ et (A, C) est exponentiellement détectable, alors l'équation (ARE) a au plus une solution et si P est une solution alors le contrôle

$$u(t) = -R^{-1}B^*Py(t)$$

stabilise le système exponentiellement.

3.3.3. Exemple

Considérons le problème de contrôle optimal

$$\inf J_a(u) = \int_0^{+\infty}\int_0^1 \{|y(x,t)|^2 + |u(x,t)|^2\}\,dx\,dt$$

sous la contrainte

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial y}{\partial x}(x,t) + u(x,t) \\ y(x,0) = y_0(x) \\ \dfrac{\partial y}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial y}{\partial x}(1,t) = 0 \end{cases}$$

(Voir exemple 2.2.2).

On vérifie que (A, B) est stabilisable et que (A, C) est détectable.

Pour $y_1 = \varphi_n$ et $y_2 = \varphi_m$, l'équation (AR, δ) prend la forme

$$\langle A\varphi_n, P\varphi_m\rangle + \langle P\varphi_n, A\varphi_m\rangle - \langle P\varphi_n, P\varphi_m\rangle + \langle \varphi_n, \varphi_m\rangle = 0$$

qui se réécrit comme suit

$$\lambda_n \langle \varphi_n, P\varphi_m\rangle + \lambda_m \langle P\varphi_n, \varphi_m\rangle - \langle P\varphi_n, \varphi_m\rangle + \langle \varphi_n, \varphi_m\rangle = 0$$

Mais

$$\langle P\varphi_n, P\varphi_m\rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{+\infty} \langle P\varphi_n, \varphi_k\rangle \varphi_k, \sum_{j=0}^{+\infty} \langle P\varphi_m, \varphi_j\rangle \varphi_j \right\rangle$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \langle P\varphi_n, \varphi_k\rangle \langle P\varphi_m, \varphi_k\rangle$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} P_{nk} P_{mk}$$

où $P_{nk} = \langle P\varphi_n, \varphi_k\rangle$

Alors $\lambda_n P_{nm} + \lambda_m P_{nm} + \langle \varphi_n, \varphi_m\rangle - \sum_{k=0}^{+\infty} P_{nk} P_{mk} = 0$

On voit que pour $n \neq m$, $P_{nm} = 0$ est une solution de cette équation, et pour $n = m$ l'équation devient

$$2\lambda_n P_{nn} + 1 - P_{nn}^2 = 0$$

et on trouve $P_{nn} = \lambda_n + \sqrt{\lambda_n^2 + 1}$

et donc $u = Py = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-n^2\pi^2 + \sqrt{n^4\pi^4 + 1}\right) \langle y, \varphi_n\rangle \varphi_n$