Université de Batna 2
Faculté de Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

01-03-2021

Systèmes linéaires de dimension infinie
Examen final

Montrer que le problème de contrôle optimal décrit ci-dessous admet une solution unique. Caractériser la.

$$\inf_{u \in L^2(0,+\infty;L^2(0,1))} \int_0^{+\infty} \int_0^1 \{|y(x,t)|^2 + |u(x,t)|^2\} dxdt$$

où y est solution dans $L^2(0,1)$ de

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = i\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) + u(x,t),\ 0 < x < 1, t > 0\\
&y(x,0) = y_0(x), \quad 0 < x < 1,\\
&y(0,t) = y(1,t) = 0, \quad t > 0.
\end{aligned}$$

Le problème posé peut être décrit d'une façon abstraite comme suit.

$$\inf_{u(\cdot)\in L^2(0,+\infty;Y)} \int_0^{+\infty} \{ \langle Qy(t), y(t)\rangle + \langle Ru(t), u(t)\rangle \} dt$$

où $y(\cdot)$ est solution dans Y de

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Ici $Y = L^2(0,1) = U$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire dans Y

. $Q = R = I$ (Identité de Y dans Y)

. $B = I$

$A : D(A) \subset Y \longrightarrow Y$ défini par

$D(A) = H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$

$Af = i \dfrac{d^2 f}{dx^2}$

. B est un opérateur linéaire borné de U dans Y.

. R est aussi un opérateur linéaire borné de U dans Y.

. Q est un opérateur linéaire borné de Y dans Y.

. A est un opérateur linéaire de domaine dense

Déterminons l'adjoint de $D(A)$.

Soient $f \in D(A)$, $g \in Y$. Formellement, on a d'une part

$$\langle Af, g \rangle = \langle f, A^* g \rangle$$

et d'autre part

$$\langle Af, g \rangle = \int_0^1 i \frac{d^2 f}{dx^2} \bar{g}(x)\, dx$$

$$= \left[i \frac{df}{dx}(x)\, \bar{g}(x) \right]_0^1 + \int_0^1 i f(x) \frac{d^2 \bar{g}(x)}{dx}\, dx$$

Ceci s'écrit sous la forme $\langle f, g^* \rangle$ si

$$g(1) = g(0) = 0 \quad \text{et } g \in H^2(0,1) \cap H^1_0(0,1).$$

Donc le choix logique est $D(A^*) = D(A)$

et $A^* g = -i Ag$

A^* est fermé et par conséquent A est fermé.

Les valeurs propres de A sont $\lambda_n = -i n^2 \pi^2$, $n \in \mathbb{N}^*$

et les fcts propres correspondants sont

$$\varphi_n = \sqrt{2} \sin n\pi x$$

L'ensemble $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ forment une base orthonormée pour Y

Remarquons que

$$|\lambda_{n+1} - \lambda_n| = (n+1)^2\pi^2 - n^2\pi^2$$
$$= (2n+1)\pi^2 \longrightarrow +\infty \text{ qd } n \to +\infty$$

Donc l'ensemble $\{\lambda_n, n \geq 1\}$ est totalement deconnecté.

Alors A est un opérateur spectral de Riesz

et puisque $\sup \operatorname{Re} \lambda_n = 0$

A engendre un C_0-Sgpe donné par

$$S(t) f = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\lambda_n t} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n$$

Le problème de contrôle optimal considéré dans cet exercice admet une solution unique si la paire (A,B) est stabilisable et la paire (A,C) est ~~dé~~tectable.

C est defini par $Q = C^*C$, donc $C = I$.

Puisque A engendre un gpe unitaire $(A^* = -A)$ alors pour montrer que (A,B) est stabilisable il suffit de montrer que (A,B) est exactement contrôlable dans Y sur $[0,T]$.

(A,B) est exactement ~~de~~ contrôlable ds Y sur $[0,T]$ si il existe $\gamma > 0$ tq pour tout $y \in Y$ on a

$$\int_0^T \|B^* S^*(t) y\|^2 \, dt \geq \gamma \|y\|_Y^2$$

On a $B = I$, donc $B^* = I$

$$S^*(t) = S(-t)$$

$$B^* S^*(t) y = S(-t) y$$

$$\| B^* S^*(t) y \|_U^2 = \| S(-t) y \|_U^2$$

$$= \left\langle \sum_n e^{-\lambda_n t} \langle y, \varphi_n \rangle \varphi_n , \sum_k e^{-\lambda_k t} \langle y, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\rangle$$

$$= \sum_n \sum_k \left\langle e^{-\lambda_n t} \langle y, \varphi_n \rangle \varphi_n , e^{-\lambda_k t} \langle y, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\rangle$$

$$= \sum_n \sum_k e^{-in^2\pi^2 t} e^{ik^2\pi^2 t} \langle y, \varphi_n \rangle \overline{\langle y, \varphi_k \rangle} \langle \varphi_n, \varphi_k \rangle$$

$$= \sum_n |\langle y, \varphi_n \rangle|^2 = \|y\|_Y^2$$

D'où

$$\int_0^T \| B^* S^*(t) y \|_U^2 \, dt = \int_0^T \|y\|_Y^2 \, dt = T \|y\|_Y^2$$

Donc (A, B) est exactement contrôlable ds Y sur $[0, T]$

Par conséquent le contrôle $u = -B^* y$ stabilise le système exponentiellement.

La paire (A, C) est détectable ssi (A^*, C^*) est stabilisable.

Mais $(A^*, C^*) = (A^*, C)$

$$= (-A, C)$$

et $(-A, C)$ est stabilisable. La démonstration est similaire à celle de la stabilisabilité de (A, B)

Le problème de contrôle considéré admet alors une solution unique donnée par $u = -Py$ où P est solution de l'équation algébrique de Riccati

$$\langle Ay_1, Py_2\rangle + \langle Py_1, Ay_2\rangle - \langle P \quad P y_1, y_2\rangle + \langle y_1, y_2\rangle = 0$$

où $y_1, y_2 \in D(A)$

Déterminons P.

Réécrivons l'équation algébrique de Riccati pour $y_1 = \varphi_n$ et $y_2 = \varphi_m$

$$\langle A\varphi_n, P\varphi_m\rangle + \langle P\varphi_n, A\varphi_m\rangle - \langle P \quad P\varphi_n, \varphi_m\rangle + \langle \varphi_n, \varphi_m\rangle = 0$$

Puisque $A\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$; alors

$$\lambda_n \langle \varphi_n, P\varphi_m\rangle + \overline{\lambda_m} \langle P\varphi_n, \varphi_m\rangle - \langle P \quad P\varphi_n, \varphi_m\rangle + \langle \varphi_n, \varphi_m\rangle = 0$$

ou $\lambda_n \langle \varphi_n, P\varphi_m\rangle + \overline{\lambda_m} \langle P\varphi_n, \varphi_m\rangle - \langle P\varphi_n, P\varphi_m\rangle + \langle \varphi_n, \varphi_m\rangle = 0$

Mais

$$\langle P\varphi_n, P\varphi_m\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{+\infty} \langle P\varphi_n, \varphi_k\rangle \varphi_k, \sum_{j=1}^{+\infty} \langle P\varphi_m, \varphi_j\rangle \varphi_j \right\rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \langle P\varphi_n, \varphi_k\rangle \overline{\langle P\varphi_m, \varphi_k\rangle}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} P_{nk} \overline{P_{mk}}$$

où $P_{nk} = \langle P\varphi_n, \varphi_k\rangle$, $P_{mk} = \langle P\varphi_m, \varphi_k\rangle$

Alors l'equation algébrique de Riccati prend la forme

$$\lambda_n \langle \varphi_n, P\varphi_m \rangle + \overline{\lambda}_m \langle P\varphi_n, \varphi_m \rangle - \sum_{k=1}^{+\infty} P_{nk} \overline{P_{mk}} + \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = 0$$

ou $$\lambda_n P_{nm} + \overline{\lambda}_m P_{nm} - \sum_{k=1}^{+\infty} P_{nk} \overline{P_{mk}} + \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = 0$$

Remarquons que pour $n \neq m$, $P_{nm} = 0$ est une solution, et si on prend cette solution alors pour $n=m$ l'equation prend la forme

$$(\lambda_n + \overline{\lambda}_n) P_{nn} - P_{nn}^2 + 1 = 0$$

ou $$P_{nn}^2 - 1 = 0.$$

Puisque la solution P est non-négative on prend

$$P_{nn} = 1.$$

Alors

$$\begin{aligned}
Py &= P\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \langle y, \varphi_n \rangle \varphi_n\Big) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \langle y, \varphi_n \rangle P\varphi_n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \langle y, \varphi_n \rangle \Big(\sum_{k=1}^{+\infty} \langle P\varphi_n, \varphi_k \rangle \varphi_k\Big) \\
&= \sum_n \sum_k P_{nk} \langle y, \varphi_n \rangle \varphi_k \\
&= \sum_n P_{nn} \langle y, \varphi_n \rangle \varphi_n = \sum_n \langle y, \varphi_n \rangle \varphi_n \\
&= y.
\end{aligned}$$

et $u = -Py = -y$