Université de Batna 2
Faculté de Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

01-03-2021

Systèmes linéaires de dimension infinie
Interrogation écrite

Soit Y un espace de Hilbert réel et $T > 0$. Considérons dans Y le système de contrôle décrit par

$$\begin{aligned} y'(t) &= Ay(t) + Bu(t) \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

où:

- A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe $S(t)$ sur Y,
- B est un opérateur linéaire borné d'un autre espace de Hilbert réel U dans Y.

(i)- Montrer que la paire (A, B) est exactement contrôlable dans Y sur $[0, T]$ si et seulement si pour tout $y_d \in Y$, il existe $u(.) \in L^2(0, T; U)$ tel que

$$\int_0^T S(T-\tau)Bu(\tau)d\tau = y_d$$

(ii)- Supposons que A engendre un C_0-groupe. Montrer que la paire (A, B) est exactement contrôlable dans Y sur $[0, T]$ si et seulement si elle est exactement nulle contrôlable dans Y sur $[0, T]$.

ii) (A,B) est exactement contrôlable dans Y sur $[0,T]$ ssi pour tout $y_d \in Y$, il existe $u(\cdot) \in L^2(0,T;U)$ tq $\int_0^T S(T-\tau)Bu(\tau)\,d\tau = y_d$

$\Rightarrow$?

Si (A,B) est exact. contrôlable dans Y sur $[0,T]$ alors pour tout $y_0, y_d \in Y$ il existe $u(\cdot) \in L^2(0,T;U)$

tq $\quad y_d = y(T)$

où $\quad y(T) = S(T)y_0 + \int_0^T S(T-\tau)Bu(\tau)\,d\tau$

et pour $y_0 = 0$, on a

$$\int_0^T S(T-\tau)Bu(\tau)\,d\tau = y_d$$

? $\Leftarrow$ Supposons que pour tout $y_d \in Y$, il existe $u(\cdot) \in L^2(0,T;U)$ tq $\int_0^T S(T-\tau)Bu(\tau)\,d\tau = y_d$

Soit $y_0 \in Y$, alors $y_d - S(T)y_0 \in Y$ et donc il existe $u(\cdot) \in L^2(0,T;U)$ tq

$$y_d - S(T)y_0 = \int_0^T S(T-\tau)Bu(\tau)\,d\tau$$

ou $\quad y_d = S(T)y_0 + \int_0^T S(T-\tau)Bu(\tau)\,d\tau$

(ii) A engendre un C_0-groupe. (A,B) est exactement contrôlable dans Y sur $[0,T]$ ssi elle est exactement nul contrôlable dans Y sur $[0,T]$.

$\Rightarrow)$ (A,B) est exact. contrôlable ds Y sur $[0,T]$ ssi pour tout $y_0, y_d \in Y$ il existe $u(\cdot) \in L^2(0,T;U)$

tq $$y_d = S(T)y_0 + \int_0^T S(T-\tau)Bu(\tau)\,d\tau$$

et pour $y_d = 0$, on a
$$S(T)y_0 + \int_0^T S(T-\tau)Bu(\tau)\,d\tau = 0.$$

donc (A,B) est exactement nul contrôlable.

$\Leftarrow)$ Soient $y_0, y_d \in Y$ et considérons le système décrit par
$$\begin{cases} z' = Az \\ z(T) = y_d \end{cases}$$
et définissons un nouveau état ψ par
$$\psi(t) = y(t) - z(t)$$

Alors
$$\begin{aligned}\psi'(t) &= y'(t) - z'(t) \\ &= Ay(t) + Bu(t) - Az(t) \\ &= A\psi(t) + Bu(t)\end{aligned}$$

et $$\psi(0) = y_0 - z(0)$$

Remarquons que $y(T) = y_d$ ssi $\psi(T) = 0$.

Puisque (A,B) est exactement nulle contrôlable dans Y sur $[0,T]$, il existe $u(\cdot) \in L^2(0,T;U)$. tq

$$\psi(T) = 0$$

c.a.d $\quad y(T) = y_d$

ou $\quad S(T)y_0 + \int_0^T S(T-\tau)\,Bu(\tau)\,d\tau = y_d$

Donc la paire (A, B) est exactement contrôlable dans Y sur $[0, T]$.