1. La solution générale de l'équation

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - \lambda f = 0$$

est donnée par

$$f(x) = \alpha e^{\sqrt{\lambda} x} + \beta e^{-\sqrt{\lambda} x}$$

α, β sont des constantes réelles qqc.

Des conditions aux limites on a :

$$\begin{cases} \alpha\sqrt{\lambda} e^{\sqrt{\lambda}\pi} - \beta\sqrt{\lambda} e^{-\sqrt{\lambda}\pi} = 0 \\ \alpha\sqrt{\lambda} - \beta\sqrt{\lambda} = 0 \end{cases}$$

ou $\begin{cases} \alpha\sqrt{\lambda} = \beta\sqrt{\lambda} \\ \alpha\sqrt{\lambda}\left(e^{\pi\sqrt{\lambda}} - e^{-\pi\sqrt{\lambda}}\right) = 0 \end{cases}$

ou $\begin{cases} \alpha\sqrt{\lambda} = \beta\sqrt{\lambda} \\ 2\alpha\sqrt{\lambda}\, \operatorname{sh} \pi\sqrt{\lambda} = 0. \end{cases}$

Si $\lambda = 0$, alors $f(x) = C$ (Const. réelle qqc) est la solution du problème aux limites donnée.

Pour $\lambda > 0$, $\alpha = 0$ et donc $f(x) = 0$

Pour $\lambda < 0$, $\alpha = 0$ ou $\operatorname{sh} \pi\sqrt{\lambda} = 0$

si $\operatorname{sh} \pi\sqrt{\lambda} = 0$, alors $i \sin i\pi\sqrt{\lambda} = 0$

et par conséquent $\lambda = -n^2$

et $f(x) = \alpha \cos nx$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

2a. Il suffit de montrer que l'opérateur $\lambda I - A_1$ est fermé, où $\lambda > 0$ et $A_1 f = \frac{d^2 f}{dx^2}$ avec $D(A_1) = D(A)$

Soit $g \in Y$. Alors

$$(\lambda I - A_1) f = g \iff \begin{cases} \lambda f - \frac{d^2 f}{dx^2} = g \\ \frac{df}{dx}(0) = \frac{df}{dx}(\pi) = 0. \end{cases}$$

Ce problème aux limites admet une solution unique et par conséquent $\lambda I - A$ est bijectif.

Donc $f = (\lambda I - A_1)^{-1} g$

Maintenant, multiplions les deux membres de

$$\lambda f - \frac{d^2 f}{dx^2} = g$$

par $\bar{f}$ et intégrons de 0 à π, on obtient

$$\int_0^\pi \lambda f(x) \bar{f}(x) dx - \int_0^\pi \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \bar{f}(x) dx = \int_0^\pi g(x) \bar{f}(x) dx$$

ou $\lambda \|f\|_Y^2 + \left\| \frac{df}{dx} \right\|_Y^2 = \langle g, f \rangle$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient $\lambda \|f\|_Y^2 \leq \|g\|_Y \|f\|_Y$

D'où

$$\|(\lambda I - A_1)^{-1} g\|_Y \leq \|g\|_Y$$

$(\lambda I - A_1)^{-1}$ est borné, et donc $\lambda I - A_1$ est fermé.

2b. Soient λ une valeur propre de A et φ la fonction propre correspondante. Alors

$$A\varphi = \lambda\varphi$$

ou

$$\begin{cases} i\dfrac{d^2\varphi}{dx^2} - \lambda\varphi = 0 \\ \dfrac{d\varphi}{dx}(0) = \dfrac{d\varphi}{dx}(\pi) = 0 \end{cases}$$

De la question 1, on déduit que les valeurs propres de A et les fcts propres correspondantes sont :

$$\lambda_0 = 0 \qquad \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$$\lambda_n = -in^2 \qquad \varphi_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx, \quad n = 1, 2, \dots$$

2c. Les fonctions propres φ_n, $n = 0, 1, 2, \dots$, forment une base orthonormée de $L^2(0,\pi)$. Donc l'ensemble $\{\varphi_n, \ n = 0, 1, 2, \dots\}$ est une base de Riesz.

On a aussi $|\lambda_{n+1} - \lambda_n| = |(n+1)^2 - n^2| \to +\infty$ qd $n \to +\infty$, c'est à dire que l'ensemble $\{\lambda_n, \ n = 0, 1, 2, \dots\}$ est totalement déconnecté.

Donc A est un opérateur spectral de Riesz, et puisque $\sup_{n \geq 0} \operatorname{Re} \lambda_n = 0 < +\infty$

A engendre un C_0-semigroupe $S(t)$ donné par

$$S(t)f = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{\lambda_n t} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n$$

3. On réécrit le système donné sous la forme abstraite

$$y'(t) = Ay(t) + Bu(t)$$
$$y(0) = y_0$$
$$z(t) = Cy(t)$$

où

$$A : D(A) \subset Y \longrightarrow Y$$
$$Af = i\,\frac{d^2 f}{dx^2}$$

$$B : U = \mathbb{C} \longrightarrow Y, \quad (Bf)(x) = (\sin x)\, f$$

$$C : Y \longrightarrow \mathbb{C} = Z \qquad Cf = \int_0^{\pi} (\sin x) f(x)\, dx$$

D'après la question 2, A engendre un C_0-semigroupe $S(t)$ donné par

$$S(t)f = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda_n t} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n$$

B est linéaire et borné;

$$\|Bf\|_Y^2 = \int_0^{\pi} (\sin x)^2 |f|^2 dx = \left(\int_0^{\pi} (\sin x)^2 dx\right) |f|^2$$
$$\leq \text{Cst.}\, |f|^2$$

C est linéaire et borné;

$$|Cf|_{\mathbb{C}} = \left| \int_0^{\pi} (\sin x) \bar{f}(x)\, dx \right| = \left| \langle \sin(\cdot), f(\cdot) \rangle_Y \right|$$
$$\leq \|\sin(\cdot)\|_Y \cdot \|f\|_Y \leq \text{Cst.}\, \|f\|_Y$$

Soit $T>0$. La paire (A,B) est approximativement contrôlable dans Y sur $[0,T]$ si l'implication suivante est satisfaite

$$B^* S^*(t) f = 0 \text{ sur } [0,T] \Rightarrow f = 0.$$

Determinons $S^*(t)$.

Soient $f, g \in Y$. Alors

$$\langle S(t) f, g \rangle = \langle f, S^*(t) g \rangle$$

or

$$\langle S(t) f, g \rangle = \left\langle \sum_{n=0}^{+\infty} e^{\lambda_n t} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n , \sum_{k=0}^{+\infty} \langle g, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\rangle$$

$$= \sum_n \sum_k e^{\lambda_n t} \langle f, \varphi_n \rangle \overline{\langle g, \varphi_k \rangle} \langle \varphi_n, \varphi_k \rangle$$

$$= \sum_k \langle f, \varphi_k \rangle \overline{e^{-\lambda_k t} \langle g, \varphi_k \rangle}$$

$$= \left\langle \sum_n \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n , \sum_k e^{-\lambda_k t} \langle g, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\rangle$$

Donc $\quad S^*(t) g = \sum_k e^{-\lambda_k t} \langle g, \varphi_k \rangle \varphi_k = S(-t) g$

Determinons B^*.

Soient $f \in U$ et $g \in Y$. Alors

$$\langle Bf, g \rangle_Y = \langle f, B^* g \rangle_U$$

or

$$\langle Bf, g \rangle = \int_0^\pi (Bf)(x) \bar{g}(x)\,dx = \int_0^\pi f \sin x \, \bar{g}(x)\,dx$$

$$= \left\langle f, \int_0^\pi (\sin x) \bar{g}(x)\,dx \right\rangle_{\mathbb{C}}$$

D'où $\quad B^* g = \int_0^\pi (\sin x) \bar{g}(x)\,dx$

On a maintenant

$$B^* S^*(t) f = B^* S(-t) f$$
$$= B^*\left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda_n t}\langle f, \varphi_n\rangle \varphi_n\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda_n t}\langle f, \varphi_n\rangle B^*\varphi_n$$

Mais
$$B^*\varphi_n = \int_0^\pi (\sin x)\,\varphi_n(x)\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi \sin x \cos nx\,dx$$

et
$$\int_0^\pi \sin x\cos nx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \{\sin(1+n)x + \sin(1-n)x\}\,dx$$

Pour $n = 1$, on a
$$\int_0^\pi \sin x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^\pi$$
$$= \frac{1}{4}\left[1 - \cos 2\pi\right] = 0.$$

Pour $n \neq 1$,

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi \{\sin(1+n)x + \sin(1-n)x\}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{1+n}\cos(1+n)x - \frac{1}{1-n}\cos(1-n)x\right]_0^\pi$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos(1+n)\pi}{1+n} + \frac{\cos(1-n)\pi}{1-n} - \frac{1}{1+n} - \frac{1}{1-n}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+n}(-1)^{n+1} + \frac{1}{1-n}(-1)^{n+1} - \frac{1}{1+n} - \frac{1}{1-n}\right]$$
$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+n} + \frac{1}{1-n}\left[(-1)^{n+1} - 1\right]\right]$$
$$= +\cancel{\frac{1}{2}}\,\frac{1}{1-n^2}\left[(-1)^n + 1\right] = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ \dfrac{2}{1-n^2} & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

Alors
$$B^*\varphi_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ \dfrac{2}{1-n^2}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} & n \text{ pair} \end{cases}$$

Remarquons que pour $f = \varphi_n$ avec n impair

on a $\quad B^* S^*(t) f = 0 \quad$ sur $[0,T]$.

Donc la paire (A,B) n'est pas approximativement contrôlable sur $[0,T]$, par conséquent elle n'est pas exactement contrôlable.

La paire (A,C) est approximativement observable si $\quad CS(t)f = 0$ sur $[0,T] \Rightarrow f = 0$.

Vu que $C = B^*$, $\quad CS(t)f = \sum\limits_n e^{\lambda_n t} \langle f, \varphi_n \rangle B^* \varphi_n$

et vu la valeur de $B^*\varphi_n$, on conclut que la paire (A,C) n'est pas approximativement observable, et donc elle n'est pas exactement observable.