Exercice N°.2

$$f : B(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$x \longmapsto \frac{x}{1-\|x\|^2}$$

On a
$$f(x) = \left(\frac{x_1}{1-\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \dots, \frac{x_n}{1-\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \right)$$

Les composantes de f sont continues et dérivables sur $B(0,1)$ donc f est dérivable sur $B(0,1)$

La fonction inverse f^{-1} est donnée par
$$f^{-1}(y) = \frac{2y}{1+\sqrt{1+4\|y\|^2}}$$
$$= \left(\frac{2y_1}{1+\sqrt{1+4\sum_{i=1}^{n} y_i^2}}, \dots, \frac{2y_n}{1+\sqrt{1+4\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)}} \right)$$

Les composantes de f^{-1} sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}^n$, donc f^{-1} est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^n$.

Par conséquent f est un difféomorphisme de $B(0,1)$ sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice No. 2

On définit l'application suivante

$$f : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y), f_3(x,y))$$

où $(x,y) \in \mathbb{R}^3$ et

$$f_1(x,y) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$
$$f_2(x,y) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$
$$f_3(x,y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

On a $M = \{ x,y \in \mathbb{R}^3 : f_1(x,y) = 1,\ f_2(x,y) = 1,\ f_3(x,y) = 0 \}$.

Il suffit de montrer que $(1,1,0)$ est une valeur régulière pour f. Donc on montre que l'application

$$Df(p) : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$h \longrightarrow Df(p)h$$

est surjective pour $p \in M$.

Posons $p = (p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3)$

On a

$$Df(p)h = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(p) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial y_3}(p) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(p) & \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(p) & \frac{\partial f_3}{\partial y_1}(p) & \frac{\partial f_3}{\partial y_2}(p) & \frac{\partial f_3}{\partial y_3}(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \end{pmatrix}$$

$$Df(p)h = \begin{pmatrix} \cdot_1 & \cdot_2 & \cdot_3 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 2q_1 & 2q_2 & 2q_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 & q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \end{pmatrix}$$

On montre que les trois lignes de $Df(p)$ sont linéairement indpdts. On montre ce qui suit

$$\alpha \begin{pmatrix} 2p_1 \\ 2p_2 \\ 2p_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2q_1 \\ 2q_2 \\ 2q_3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

$$2\alpha p_1 + \gamma q_1 = 0 \qquad\qquad 2\beta q_1 + \gamma p_1 = 0$$
$$2\alpha p_2 + \gamma q_2 = 0 \qquad \text{et} \qquad 2\beta q_2 + \gamma p_2 = 0$$
$$2\alpha p_3 + \gamma q_3 = 0 \qquad\qquad 2\beta q_3 + \gamma p_3 = 0$$

De ces équations, on obtient

$$2\alpha(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \gamma(p_1 q_1 + q_2 p_2 + q_3 p_3) = 0$$

$$2\alpha = 0 \quad \text{et donc } \alpha = 0$$

$$2\beta(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) + \gamma(p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3) = 0$$

$$2\beta = 0 \quad \text{et donc } \beta = 0$$

$$\gamma(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) = 0 \quad \text{et donc } \gamma = 0$$

Le rang de $Df(p)$ est donc 3.

$Df(p)$ est [illegible]

M est alors une sous-variété de dimension 3.

Exercice No. 3

(i). $$V(x,y,z) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi_t(x,y,z)$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(e^t x, e^{-t} y, z+t\right)$$

$$= \left(x, -y, 1\right)$$

(ii) Posons $W = \frac{\partial}{\partial x}$

Donc $W = (1, 0, 0)$.

$$[V,W]_i = \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial W_i}{\partial x_j} V_j - \frac{\partial V_i}{\partial x_j} W_j\right) \qquad i = 1, 2, 3.$$

$V_1 = x$, $V_2 = -y$, $V_3 = 1$

$W_1 = 1$, $W_2 = 0$ $W_3 = 0$

$$[V,W]_1 = \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial W_1}{\partial x_j} V_j - \frac{\partial V_1}{\partial x_j} W_j\right) = -\frac{\partial V_1}{\partial x} W_1 = -1$$

$$[V,W]_2 = \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial W_2}{\partial x_j} V_j - \frac{\partial V_2}{\partial x_j} W_j\right) = 0$$

$$[V,W]_3 = \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial W_3}{\partial x_j} V_j - \frac{\partial V_3}{\partial x_j} W_j\right) = 0$$

Donc $[V,W] = -\frac{\partial}{\partial x}$ ou $[V,W] = (-1, 0, 0)$.