Exercice

Posons $r = x^2+y^2$. Alors

$$\frac{dr}{dt} = 2xx' + 2yy'$$

$$= 2x\left(x - y - x\left(x^2+\frac{3}{2}y^2\right)\right) + 2y\left(x+y-y\left(x^2+\frac{1}{2}y^2\right)\right)$$

$$= 2x^2 - 2xy - 2x^2\left(x^2+\frac{3}{2}y^2\right) + 2xy + 2y^2 - 2y^2\left(x^2+\frac{1}{2}y^2\right)$$

$$= 2(x^2+y^2) - 2x^2\left(x^2+\frac{3}{2}y^2\right) - 2y^2\left(x^2+\frac{1}{2}y^2\right)$$

$$= 2(x^2+y^2) - 2x^4 - 3x^2y^2 - 2x^2y^2 - y^4$$

$$= 2(x^2+y^2) - 2x^4 - 5x^2y^2 - y^4$$

$$= 2(x^2+y^2) - (x^4+2x^2y^2+y^4) - x^4 - 3x^2y^2$$

$$= 2(x^2+y^2) - (x^2+y^2)^2 - x^2(x^2+3y^2)$$

De ceci, on obtient l'inégalité suivante

$$\frac{dr}{dt} \leq 2r - r^2$$

ou $$\frac{dr}{dt} \leq r(2-r)$$

Pour $r > 2$ $$\frac{dr}{dt} < 0$$

D'autre part, on a

$$\frac{dr}{dt} \geq 2(x^2+y^2) - (x^2+y^2)^2 - 3(x^2+y^2)^2$$

ou $$\frac{dr}{dt} \geq 2r - 4r^2$$

$$\frac{dr}{dt} \geq 2r(1-2r)$$

Pour $0 < r < \frac{1}{2}$, $\frac{dr}{dt} > 0$.

D'après le théorème de Poincaré-Bendixson le système admet un cycle limite dans la région $\frac{1}{2} < r < 2$, puisque $(0,0)$ est le seul pt d'equilibre.

Exercice No. 2

1. On a $\begin{pmatrix} x(k+1) \\ y(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ y(k) \end{pmatrix}$

Les valeurs propres de $\begin{pmatrix} 1/3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ sont

$\lambda_1 = 1/3$, $\lambda_2 = 3$

Puisque $|\lambda_2| > 3$, le pt d'equilibre $(0,0)$ est instable

2. Les pts d'equilibre sont donnés par

$$x = -0.5y + x^2 + y^2$$
$$y = -x + x^2 + y^2$$

Ceci implique $x - y = -0,5y + x$

et donc $y = 0$

D'ou $x = x^2$ et donc $x = 1$, ou $x = 0$

Les pts d'equilibre sont $(0,0)$ et $(1,0)$

La matrice jacobienne associée au système est donnée par $A(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -0,5 + 2y \\ -1 + 2x & 2y \end{pmatrix}$

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} & \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I_2 - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda & 0,5 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 0,5$$

$$\lambda = \pm\sqrt{0,5}$$

$|\lambda| < 1$; $(0,0)$ est stable

$$A(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & -0,5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I_2 - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda-2 & 0,5 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda-2)+0,5$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 1 + 0,5 = (\lambda-1)^2 - 0,5$$

$\lambda_1 = 1+\sqrt{0,5}$, $\lambda_2 = 1-\sqrt{0,5}$

$|\lambda_1| > 1$ donc $(1,0)$ est instable.

Exercice 3.

Les pt d'équilibre sont donnés par

$$\begin{cases} x^2(1-x) - xy = 0 \\ y\left(x - \frac{1}{\lambda}\right) = 0 \end{cases}$$

Donc $(0,0)$, $(1,0)$, $\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\lambda-1}{\lambda^2}\right)$ sont les pts d'équilibre. Remarquons que pour $\lambda = 1$, on a $\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\lambda-1}{\lambda^2}\right) = (1,0)$

La matrice jacobienne associée au système donné est

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - 3x^2 - y & -x \\ y & x - \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$$

$$\cdot\ A(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$$

$$\cdot\ A(1,0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 - \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$$

Pour $A(0,0)$, les valeurs propres sont 0 et $-1/\lambda$ donc la méthode de linéarisation ne nous permet pas de conclure sur la nature du pt d'équilibre.

$(1,0)$ est un ~~col~~ nœud stable si $1 - \frac{1}{\lambda} < 0$ et un col si

$1 - \frac{1}{\lambda} > 0$:

Si $\lambda = 1$, 0 est une valeur propre de $A(1,0)$

$$\cdot\ A\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\lambda-1}{\lambda^2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda-2}{\lambda^2} & -\frac{1}{\lambda} \\ \frac{\lambda-1}{\lambda^2} & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $A\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^2}\right)$ sont

$$\mu_{1,2} = \frac{\lambda - 2}{2\lambda^2} \pm i \sqrt{\frac{\lambda^2 - \lambda + 2}{\lambda^4}}$$

Posons $\alpha(\lambda) = \frac{\lambda - 2}{2\lambda^2}$ $\beta(\lambda) = \sqrt{\frac{\lambda^2 - \lambda + 2}{\lambda^4}}$

On a $\alpha(2) = 0$, $\beta(2) = \sqrt{\frac{4}{16}} \neq 0$

et $\alpha'(2) = \frac{1}{8} > 0$.

On montre que $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ est asymptotiquement stable.

Donc il existe ~~$2<$~~ λ_1 telle que pour $2 < \lambda < \lambda_1$, le système a un cycle limite.