Considérons dans $Y = L^2(0,\pi)$ l'opérateur A défini par
$$Af = \frac{d^2f}{dx^2} + 2f$$
$$D(A) = \left\{ f \in Y : \frac{df}{dx}, \frac{d^2f}{dx^2} \in Y : \frac{df}{dx}(0) = \frac{df}{dx}(\pi) = 0 \right\}.$$

Pour montrer que A est fermé, il suffit de montrer que A^{-1} existe et qu'il est borné.
Soit $g \in Y$, et considérons le problème aux limites

$$\begin{cases} \frac{d^2f}{dx^2} + 2f = g \\ \frac{df}{dx}(0) = \frac{df}{dx}(\pi) = 0 \end{cases}$$

On réécrit l'équa. diff. sous forme matricielle

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} f \\ \frac{df}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f \\ \frac{df}{dx} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$$

La solution générale de cette équation est donnée par

$$\begin{pmatrix} f(x) \\ \frac{d}{dx}f(x) \end{pmatrix} = e^{ax}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \int_0^x e^{a(x-s)}\begin{pmatrix} 0 \\ g(s) \end{pmatrix} ds$$

On détermine c_1 et c_2 en utilisant les conditions aux limites. Ici $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc A^{-1} existe.

Montrons que A^{-1} est ~~forme~~ borné. Multiplions les deux membre de l'equation $\frac{d^2f}{dx^2}+2f=g$ par f, et intégrons sur $[0,\pi]$.

On obtient

$$\int_0^\pi \left(\frac{d^2f}{dx^2}+2f\right) f\,dx = \int_0^\pi fg\,dx$$

Aprés une integration par parties, on a

$$\int_0^\pi \frac{d^2f}{dx^2} f\,dx + 2\int_0^\pi |f|^2 dx = \int_0^\pi fg\,dx$$

$$\left[\frac{df}{dx} f\right]_0^\pi - \int_0^\pi \left|\frac{df}{dx}\right|^2 dx + 2\int_0^\pi |f|^2 dx = \int_0^\pi fg\,dx$$

et ceci nous donne

$$2\|f\|^2_{L^2(0,\pi)} - \left\|\frac{df}{dx}\right\|^2_{L^2(0,\pi)} = \langle f, g\rangle_{L^2(0,\pi)}$$

donc

$$2\|f\|^2_{L^2(0,\pi)} \leq \|f\|_{L^2(0,\pi)} \|g\|_{L^2(0,\pi)}$$

apres avoir utiliser l'inegalite de Cauchy-Schwarz

Par conséquent

$$\|f\|_{L^2(0,\pi)} \leq \frac{1}{2}\|g\|_{L^2(0,\pi)}$$

ou

$$\|A^{-1}g\|_{L^2(0,\pi)} \leq \frac{1}{2}\|g\|_{L^2(0,\pi)}$$

car $f=A^{-1}g$. Ceci prouve que A^{-1} est borné.

3/ On réécrit sous la forme abstraite

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t) \\ z(t) = Cy(t) \end{cases}$$

où $B : U = \mathbb{R} \longrightarrow Y$

$f \longrightarrow Bf$

avec $(Bf)(x) = b(x)\, f$

$C : Y \longrightarrow \mathbb{R} = Z$

$f \longrightarrow Cf = \int_0^\pi h(x) f(x)\,dx$

A est l'opérateur ci-dessous.

<u>$B \in \mathcal{L}(U, Y)$:</u>

$$\|Bf\|_Y^2 = \int_0^\pi |(Bf)(x)|^2 dx = \int_0^\pi |b(x) f|^2 dx$$

$$= \left(\int_0^{\pi/2} dx\right) |f|^2 = \frac{\pi}{2} |f|^2$$

<u>$C \in \mathcal{L}(Z, Y)$:</u>

$$|Cf|_{\mathbb{R}}^2 = \left| \int_0^\pi h(x) f(x)\, dx \right|^2$$

$$\leq \left(\int_0^\pi |b(x)|^2 dx\right)\left(\int_0^\pi |f(x)|^2 dx\right)$$

$$\leq \pi/2\, \|f\|^2_{L^2(0,\pi)}.$$

9b) Posons $\tilde{D} = \frac{d^2 f}{dx^2}$ avec $D(\tilde{D}) = D(A)$.
Soient λ une valeur propre de $\tilde{D}$ et φ la fct propre correspondante. Alors

$$\tilde{D}\varphi = \lambda\varphi$$

et $A\varphi = (\lambda+2)\varphi$

Donc $\lambda+2$ est une valeur propre de A et φ est la fct. propre correspondante.
On sait que $\lambda_n = -n^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$
$\varphi_0 = 1/\sqrt{\pi}$, $\varphi_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx$, $n = 1, 2, \dots$
Par conséquent les $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ sont les fcts propres de A, et $\mu_n = \lambda_n + 2$, $n = 0, 1, 2, \dots$ sont les valeurs propres de A.

9c) L'ensemble $\{\varphi_0, \varphi_n, n = 1, 2, \dots\}$ forme une base orthonormée de $L^2(0, \pi)$.
En plus on a

$$|\mu_{n+1} - \mu_n| = |-(n+1)^2 + 2 + n^2 - 2|$$
$$= |(2n+1)| \longrightarrow +\infty \text{ qd } n \to +\infty$$

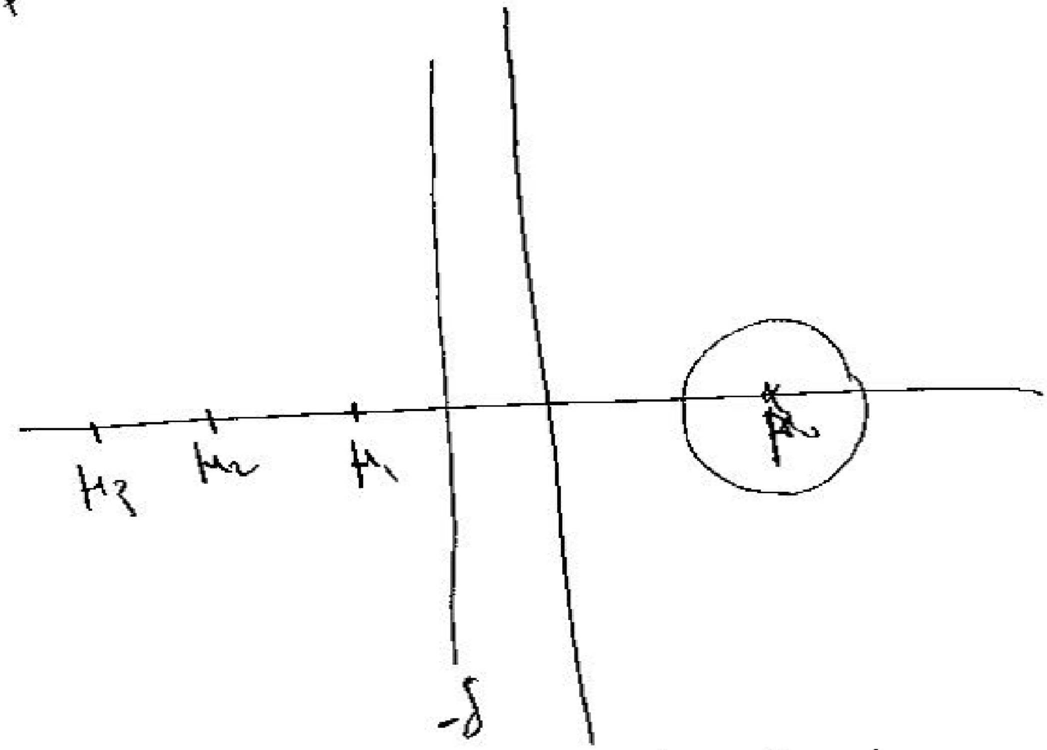
l'ensemble $\{\mu_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ est alors totalement deconnecter.
Ceci nous permet de conclure que A est un opérateur spectral de Riesz, et vu que

$$\sup \operatorname{Re} \mu_n = 2 < +\infty$$

A engendre un C_0-sgpé $S(t)$ donné par

$$S(t)f = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{\mu_n t} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n$$

A vérifie l'hypothèse de la décomposition du spectre:



$\sigma_u(A) = \{\lambda \in \sigma(A),\ \lambda > -\delta\} = \{\mu_0\}$

$\sigma_s(A) = \{\lambda \in \sigma(A),\ \lambda < -\delta\} = \{\mu_1, \mu_2, \dots\}$

Soient $Y_u = [\{\varphi_0\}]$ et $Y_s = \overline{[\{\varphi_n;\ n \geq 1\}]}$

Donc $Y = Y_u \oplus Y_s$

La projection du système considéré sur Y_s est donnée par

$$\frac{d}{dt}\langle y(t), \varphi_n\rangle = \langle Ay(t), \varphi_n\rangle + \langle Bu(t), \varphi_n\rangle \quad n = 1, 2, \dots$$

or

$$\cancel{\frac{d}{dt} y_n(t)} = \frac{d}{dt}\langle y(t), \varphi_n\rangle = \langle y(t), A\varphi_n\rangle + \langle Bu(t), \varphi_n\rangle$$

Car $A = A^*$

Posons $y_n(t) = \langle y(t), \varphi_n \rangle$

Donc on a

$$\frac{d}{dt} y_n(t) = \mu_n y_n(t) + \langle B_u(t), \varphi_n \rangle, \quad n = 1, 2, \ldots$$

ou sous forme matricielle

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \mu_2 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \langle Bu(t), \varphi_1 \rangle \\ \langle Bu(t), \varphi_2 \rangle \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Posons $A_s = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & 0 \\ & \mu_2 & & \\ & & \mu_3 & \\ 0 & & & \ddots \;\mu \end{pmatrix}$

A_s engendre un C_0-sg $S_s(t)$ sur Y_s donné

par $S_s(t) = \begin{pmatrix} e^{\mu_1 t} & & 0 \\ & e^{\mu_2 t} & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$

A_s vérifie l'hypothèse de la croissance déterminée par le spectre

$$\sup_{n \geq 1} \operatorname{Re} \mu_n = \omega_0(S_s(t)).$$

La projection du système considéré sur Y_n est donnée par

$$\frac{d}{dt} y_n(t) = \mu_n y_n(t) + \langle Bu(t), \varphi_n \rangle \quad , \quad n=0$$

c.a.d.

$$\frac{d}{dt} y_0(t) = \mu_0 y_0(t) + \langle Bu(t), \varphi_0 \rangle$$

$\mu_0 = 2, \quad \varphi_0 = 1$

$$\langle Bu(t), \varphi_0 \rangle = \int_0^{\pi} (Bu(t))(x)\, \varphi_0(x)\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} b(x) u(t) \varphi_0(x)\, dx$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} u(t)$$

et donc

$$\frac{d}{dt} y_0(t) = 2 y_0(t) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} u(t)$$

D'après le critère de Kalman ce système est contrôlable, le système donné est alors stabilisable.

(A,C) est détectable ssi (A^*, C^*) est ~~st~~ stabilisable.

On a $A = A^*$.

Déterminons C^*.

Soient $f \in Y$, $q \in Z$.

On a d'une part

$$\langle Cf, q\rangle_Z = \langle f, C^*q\rangle_Y$$

et d'autre part

$$\langle Cf, q\rangle_Z = \langle Cf, q\rangle_{\mathbb{R}}$$

$$= q \int_0^{\pi} b(x) f(x)\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} q b(x) f(x)\, dx$$

$$= \langle f, Bq\rangle_Y$$

Donc $C^* = B$, et par conséquent (A,C) est détectable.