Université de Batna 2
Faculté M.I.
Département de Mathématiques

1ère Année Master Mathématiques Appliquées

25-06-2019

Géométrie différentielle

Examen final

Exercice No. 1 6

Montrer que l'ensemble $SL(2,\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre deux à coefficients réels dont le déterminant est égal à un est une sous-variété de $M(n,\mathbb{R})$. Quelles est sa dimension? Déterminer l'espace tangent à $SL(2,\mathbb{R})$ au point I_2 (I_2 est la matrice identité).

Exercice No. 2 7

Montrer que l'ensemble

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xy + xz + 2x + 2y - z = 0\}$$

est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension deux.

Exercice No. 3 7

On considère dans $\mathbb{R}^2$ les champs de vecteurs suivants

$$\begin{aligned} X &= x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \quad 2.5 \\ Y &= (x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial x} \quad 2.5 \end{aligned}$$

1. Exprimer X et Y en termes de coordonnées polaires.
2. Calculer $[X,Y](1,1)$.

1,5 2,5

Exercice No. 1

On définit l'application

$$g : M(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$A \longrightarrow g(A) = \det A$$

Il suffit de montrer que 1 est une valeur régulière de g, c'est à dire montrer que

$$Dg(A) : M(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

est surjective pour $A \in SL(2, \mathbb{R})$.

Soient $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_1 \quad a_2) \in SL(2, \mathbb{R})$

$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = (h_1 \quad h_2) \in M(2, \mathbb{R})$.

Alors

$$g(A+H) - g(A) = \det(A+H) - \det(A)$$
$$= \det(a_1 + h_1 \quad a_2 + h_2) - \det(A)$$
$$= \det(a_1 \ a_2) + \det(a_1 \ h_2) + \det(h_1 \ a_2) + \det(h_1 \ h_2)$$
$$- \det(a_1 \ a_2) = \det(a_1 \ h_2) + \det(h_1 \ a_2) + \det(h_1 \ h_2)$$

Donc

$$g(A+H) - g(A) - \det(a_1 \ h_2) - \det(h_1 \ a_2) = \det(H)$$

Posons $L(H) = \det(a_1 \ h_2) + \det(h_1 \ a_2)$

alors

$$g(A+H) - g(A) - L(H) = \det(H)$$

Par conséquent

$$\frac{|g(A+H) - g(A) - L(H)|}{\|H\|} = \frac{|\det(H)|}{\|H\|}$$

$$= \frac{|h_{11}h_{12} - h_{12}h_{21}|}{\max_{i,j} |h_{ij}|} \leq 2 \max_{ij} |h_{ij}| \to 0 \quad \text{qd} \quad \|H\| \to 0$$

D'autre part on vérifie que L est linéaire.
Donc g est différentiable et

$$Dg(A)H = \det(a_1, h_2) + \det(h_1, a_2)$$

Pour $H = A$,

$$Dg(A)H = \det(a_1, a_2) + \det(a_1, a_2)$$
$$= 2\det A = 2 \neq 0$$

Puisque $\dim \mathbb{R} = 1$, alors $Dg(A)$ est surjective, et par conséquent $SL(2,\mathbb{R})$ est une sous-variété de $M(2,\mathbb{R})$ de dimension

$$\dim M(2,\mathbb{R}) - \dim \mathbb{R} = 4 - 1 = 3.$$

$$T_{I_2} SL(2,\mathbb{R}) = \ker Dg(I_2)$$

$$H \in \ker Dg(I_2) \Rightarrow Dg(I_2)(H) = 0$$
$$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} 1 & h_{12} \\ 0 & h_{22}\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} h_{11} & 0 \\ h_{21} & 1\end{pmatrix} = 0$$
$$\Rightarrow h_{22} + h_{11} = 0$$

Donc

$$T_{I_2} SL(2,\mathbb{R}) = \{H \in M(2,\mathbb{R}) : h_{11} + h_{22} = 0\}$$
$$= \{H \in M(2,\mathbb{R}) : \operatorname{tr} H = 0\}.$$

<u>Exercice 2</u> Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y,z) \longrightarrow xy + xz + 2x + 2y - z$$

Alors $M = f^{-1}(0)$.
Montrons que 0 est une valeur régulière de f, c.a.d. $Df(p) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est surjective pour $p \in M$.

$$Df(p)h = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(p) \quad \frac{\partial f}{\partial z}(p)\right)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$$

où $p = (p_1, p_2, p_3)$ et $h = (h_1, h_2, h_3)$

$$Df(p)h = (p_2 + p_3 + 2)h_1 + (p_1 + 2)h_2 + (p_1 - 1)h_3$$

pour tout $h \in \mathbb{R}^3$. Si

$Df(p)h = 0$ pour tout

$$p_2 + p_3 + 2 = 0$$

$$p_1 + 2 = 0$$

$$p_1 - 1 = 0$$

mais ceci est impossible, donc $Df(p)$ n'est pas l'application nulle et puisque dimension de $\mathbb{R}$ est 1, $Df(p)$ est surjective et par conséquent 0 est une valeur régulière de f, d'où M est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension $3 - 1 = 2$.

<u>Exercice N° 3</u>

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} \; ; \; Y = (x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial x}$$

~~Coordonnées~~ plans $\quad x = r\cos\theta$
$\quad y = r\sin\theta$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y} \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y} \quad (2)$$

① $\times r\cos\theta$ − ② $\times \sin\theta$ nous donne

$$r\cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} = r\frac{\partial}{\partial x}$$

ou $$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

$\cancel{\frac{\partial}{\partial y}}$ ① $\times r\sin\theta$ + ② $\times \cos\theta$ nous donne

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

Donc

$$X = r\cos\theta\left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + r\sin\theta\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) = r\frac{\partial}{\partial r}$$

$$Y = r^2\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

$$= r^2\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - r\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}$$

② $$[X,Y] = \sum_{i=1}^{2}[X,Y]_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

ou $$[X,Y]_i = \sum_{j=1}^{2}\left(\frac{\partial Y_i}{\partial x_j}X_j - \frac{\partial X_i}{\partial y_j}Y_j\right)$$

$$[X,Y]_1 = x^2+y^2$$

$$[X,Y]_2 = 0$$

donc $$[X,Y] = (x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial x}$$

$$[X,Y](1,1) = 2\frac{\partial}{\partial x}$$