Université de Batna 2
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

20-01-2022

Systèmes linéaires de dimension infinie
Examen final

1. Résoudre le problème aux limites suivant

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} - \lambda f(x) = 0$$
$$\frac{df(0)}{dx} = \frac{df(\pi)}{dx} = 0$$

2. Considérons dans $Y = L^2(0, \pi)$, l'opérateur linéaire A défini par

$$\begin{aligned} Af &= i\frac{d^2 f}{dx^2} \\ D(A) &= \{f \in Y : \frac{df}{dx}, \frac{d^2 f}{dx^2} \in Y : \frac{df(0)}{dx} = \frac{df(\pi)}{dx} = 0\} \end{aligned}$$

où $D(A)$ est le domaine de A qui est dense dans Y.
2a. Montrer que A est fermé.
2b. Déterminer les valeurs propres et les fonctions propres de A.
2c. En déduire que A engendre un C_0-semigroupe $S(t)$ dont on détermine l'expression.

3. Etudier la contrôlabilité (exacte et approchée) et l'observabilité (exacte et approchée) du système entrée-sortie suivant:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = i\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} + b(x)u(t), \quad 0 < x < \pi, t > 0, \\ &y(x,0) = y_0(x), \quad 0 < x < \pi, \\ &\frac{\partial y(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial y(\pi,t)}{\partial x} = 0, \quad t > 0, \\ &z(t) = \int_0^\pi b(x)\overline{y}(x,t)dx \end{aligned}$$

où $b(x) = \sin x$.